Mitschrift zur Analysis I-Vorlesung von Prof. Dr. Weissauer im WS 1999/2000

Michael Ritzert <michael@ritzert.de>

12. Februar 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Körper **5**
1.1 Definition – Körper . . . 5
1.2 Axiome für Körper . . . 5
1.3 Beispiele . . . 5
1.4 Definition – Relation . . . 6
1.4.1 Definition – symmetrische Relation . . . 6
1.4.2 Definition – transitive Relation . . . 6
1.4.3 Definition – Äquivalenzrelation . . . 6
1.4.4 Definition – Ordnungsrelation . . . 6
1.5 Definition – Angeordnete Körper . . . 7
1.6 Körper der komplexen Zahlen . . . 8
1.7 Archimedisches Axiom . . . 9
1.8 Dichtigkeitssatz . . . 9
1.9 Bernoullische Ungleichung . . . 9
1.10 Betragsfunktion . . . 9
1.10.1 Definition – Distanz . . . 10

2 Folgen und Reihen **10**
2.1 Definition – Folge . . . 10
2.2 Definition – Cauchyfolge . . . 11
2.3 Definition – Konvergenz . . . 11
2.4 Definition – Cauchyvollständige Körper . . . 11
2.5 Definition – Körper der reellen Zahlen . . . 12
2.6 Zangenlemma . . . 12
2.7 Definition – Reihe . . . 12
2.8 Cauchy-Kriterium / Hauptlemma . . . 12
2.9 Lemmas . . . 12
2.10 Geometrische Reihe . . . 13
2.11 Verdichtungstrick . . . 13
2.12 Majorantenkriterium . . . 13
2.13 Exponentialreihe . . . 14
2.14 Binomialtheorem . . . 14
2.15 Hilfssatz – Grenzwert von Folgen in einem Intervall . . . 15
2.16 Satz – Die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ . . . 15
2.17 Umordnungssatz . . . 16
2.18 Doppelreihensatz . . . 17
2.19 Quotienten-Kriterium . . . 19
2.20 Intervallschachtelung . . . 20
2.21 Satz – Konvergente Teilfolgen . . . 20
2.22 Definition – Maximum . . . 21
2.23 Definition – Supremum . . . 21

3 Exkurs in die lineare Algebra **22**
3.1 Skalare Multiplikation . . . 22
3.2 Addition . . . 22
3.3 Skalarprodukt . . . 22
3.4 Norm . . . 22
3.5 Schwartz-Ungleichung . . . 22
3.6 Metrische Räume . . . 23
3.7 Fixpunktsatz . . . 25
3.7.1 Eine Anwendung . . . 26

4 Stetige Abbildungen **27**
4.1 Definition – Stetigkeit . . . 27
4.2 Nullstellensatz . . . 30
4.3 Das ε-δ-Kriterium . . . 31

5 Integral- & Differentialrechnung **32**
5.1 Definition – Integral . . . 32
5.2 Satz – Stetigkeit, Integrierbarkeit . . . 33
5.3 Definition – Gleichmäßige Stetigkeit . . . 34
5.4 Satz – Gleichmäßige Stetigkeit in $\mathbb{R}$ . . . 34
5.5 Definition – Folgenkompakte Räume . . . 34
5.5.1 Satz – Funktionen auf folgenkompakten Räumen . . . 34
5.6 ε-Kriterium . . . 35
5.7 Elementare Eigenschaften des Integrals . . . 35
5.7.1 Hilfssatz – Addition von Supremas . . . 36
5.8 Definition – Differenzierbarkeit . . . 36
5.9 Satz – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . 37
5.10 Definition – Ordnung . . . 38
5.11 Definition – Lineare Approximation . . . 38
5.12 Lemma . . . 38
5.12.1 Hilfssatz . . . 39
5.13 Lemma - Differenzierbarkeit, Stetigkeit . . . 39
5.14 Satz – Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . 39
5.14.1 Korrolar . . . 40
5.15 Bemerkung – Ableitung von zusammengesetzten Funktionen . . . 40
5.16 Lemma – Ableitung von x^n . . . 41
5.17 Definition – N-malige Differenzierbarkeit . . . 41
5.18 Lemma – Differenzierbarkeit von exp . . . 42
5.19 Satz – Ableitung, Monotonie . . . 42
5.20 Ableitung der Umkehrfunktion . . . 42
5.21 Satz – Kettenregel . . . 44
5.22 Satz von Taylor . . . 44
5.22.1 Restglied nach Lagrange . . . 44
5.22.2 Variante . . . 46
5.23 Regel von de l'Hospital . . . 47

5.24 Satz – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 48
5.24.1 Produktregel 49
5.24.2 Kettenregel 49
5.25 Restglied der Taylor-Formel als Integral 49
5.25.1 Eine Anwendung 50
5.26 Eulersche Formel 51
5.26.1 Bernoulli-Polynome 51
5.26.2 Anwendung – Summe der ersten n natürlichen Zahlen 52
5.26.3 Anwendung – Stirlings Formel 52
5.26.4 Anwendung – Keplersche Faßregel 52
5.26.5 Anwendung – $\log 2$ 53
5.27 Bemerkung über Bernouillipolynome 54

6 Differentialgleichungen **54**
6.1 1. Trick 54
6.2 Heuristischer Ansatz 55
6.3 Anfangswertproblem 55

1 Körper

1.1 Definition – Körper

Ein *Körper* K ist eine Menge mit zwei Abbildungen:

1. $\begin{array}{ccc} K \times K & \stackrel{+}{\to} & K \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$

2. $\begin{array}{ccc} K \times K & \stackrel{\cdot}{\to} & K \\ (a,b) & \mapsto & a \cdot b \end{array}$

1.2 Axiome für Körper

K1 $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*Assoziativgesetz*)

K2 Es existiert ein Element $0 \in K$, so daß gilt $0 + a = a$ für alle $a \in K$ (*neutrales Element*).

K3 Für jedes Element $a \in K$ gibt es ein Element $-a \in K$, so daß $(-a) + a = 0$ (*inverses Element*).

K4 Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$ (*Kommutativgesetz*).

K1' $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (*Assoziativgesetz*)

K2' Es existiert ein Element $1 \in K$, so daß gilt $1 \cdot a = a$ für alle $a \in K$ (*neutrales Element*).

K3' Für alle $a \neq 0 \in K$ existiert ein Element a^{-1} mit $a^{-1} \cdot a = 1$ (*inverses Element*).

K4' Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$ (*Kommutativgesetz*).

K5' $1 \neq 0$

D Für $a, b \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*Distributivgesetz*).

1.3 Beispiele

1. Der Körper $\mathbb{F}_2$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Berechnung von $0 \cdot 0$:
$0 \cdot 0 \stackrel{\text{K2}}{=} 0 \cdot (0 + 0) \stackrel{\text{D}}{=} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$
K3: $-(0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \stackrel{\text{K3}}{=} 0$
Addition von $-(0 \cdot 0)$: $0 = -(0 \cdot 0) + (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0)$
$0 \stackrel{\text{K1}}{=} (-0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) + 0 \cdot 0$

$0 \overset{\text{K3}}{=} 0 + 0 \cdot 0$
$0 \overset{\text{K2}}{=} 0 \cdot 0$
Dieser Beweis gilt in jedem Körper. Der selbe Beweis zeigt auch $x \cdot 0 = 0$.

2. $K = \mathbb{Q}$ Körper der rationalen Zahlen.
   $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \neq 0, q \in \mathbb{Z}\}$
   mit $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - selbst keine Körper!

3. $K = \mathbb{R}$ Körper der reellen Zahlen.

1.4 Definition – Relation

Eine *Relation* auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. $x, y \in K$ stehen genau dann in Relation ($x \underset{R}{\sim} y$), wenn $(x, y) \in R$ Jede Abbildung kann als Relation aufgefaßt werden.

1.4.1 Definition – symmetrische Relation

Eine Relation R auf X heißt *symmetrisch*, falls gilt: $x \underset{R}{\sim} y \Leftrightarrow y \underset{R}{\sim} x \ \forall x, y \in X$.

1.4.2 Definition – transitive Relation

Eine Relation heißt *transitiv*, falls für $x \underset{R}{\sim} y$ und $y \underset{R}{\sim} z$ auch gilt $x \underset{R}{\sim} z$.

1.4.3 Definition – Äquivalenzrelation

Eine Relation R heißt *Äquivalenzrelation*, falls gilt:

1. die Relation ist symmetrisch: $x \underset{R}{\sim} y \Leftrightarrow y \underset{R}{\sim} x$.
2. R ist transitiv: $x \underset{R}{\sim} y$ und $y \underset{R}{\sim} z \Rightarrow x \underset{R}{\sim} z$.
3. Für alle x gilt $x \underset{R}{\sim} x$.

1.4.4 Definition – Ordnungsrelation

R ist eine *Ordnungsrelation* auf einer Menge M, fallls gilt: $x \leq y \Leftrightarrow (x, y) \in R$.
Man fordert:

(i) $x \leq x$ (*Reflezitivität*)

(ii) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$ (*Antisymmetrie*)

(iii) $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (*Transitivität*)

1.5 Definition – Angeordnete Körper

Ein Körper K heißt angeordnet, wenn es eine Relation $<$ auf K gibt, so daß gilt:

O1 Für $x, y \in K$ gilt entweder $x = y$ oder $x < y$ oder $y < x$.

O2 Für $x < y$ und $z \in K$ beliebig gilt $x + z < y + z$.

O3 $0 < x$ und $0 < y$ impliziert $0 < x \cdot y$.

O4 Gilt $a < b$ und $b < c$, so gilt auch $a < c$ (Transitivität).

Folgerungen:

- In einem angeordneten Körper K gilt: Die Elemente, $1, 1{+}1, 1{+}1{+}1, 1{+}1{+}1{+}1, \ldots$ sind paarweise verschieden und immer von 0 verschieden. Die Menge dieser Zahlen zusammen mit dem Element 0 des Körpers gibt eine Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq K$, welche wir die Menge der natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ nennen werden.
- Ein angeordneter Körper hat unendlich viele Elemente.
- Der Körper $\mathbb{F}_2$ läßt sich nicht anordnen, da $1 + 1 = 0$.

Aus dem Axiomen folgt außerdem:

(i) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$, insbesondere $1 = 1^2 > 0$

(ii) $x > y > 0 \Rightarrow x^{-1} < y{-}1$

(iii) $x > 0$ und $y < 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$

(iv) $x < 0$ und $y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

(v) $x < y$ und $u < v \Rightarrow x + u < y + v$

(vi) $x < y \Leftrightarrow 0 < y - x$

(vii) $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$

(viii) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$

(ix) $x < y \Leftrightarrow -y < -x$

Beweis für (i): Wenn $x \neq 0$, dann gilt entweder $x < 0$ oder $x > 0$ (Axiom O1).

- Ist $x > 0$, dann ist $x^2 := x \cdot x > 0$ wegen O3.
- Ist $x < 0$, dann folgt aus O2 (setze dort $z = (-x)$), daß $(-x) + x < (-x) + 0$.
  linke Seite: $(-x) + x \overset{\text{K3}}{=} 0$
  rechte Seite: $(-x) + 0 \overset{\text{K4}}{=} 0 + (-x) \overset{\text{K2}}{=} (-x)$
  $\Rightarrow 0 < (-x)$. Aus Axiom O3 folgt $0 < (-x) \cdot (-x)$.
  Hilfssatz: $(-x) = (-1) \cdot x$

$\Rightarrow 0 < ((-1) \cdot x) \cdot ((-1) \cdot x)$
K4, K_1: $0 < ((-1) \cdot (-1)) \cdot x^2$
Hilfssatz: $((-1) \cdot (-1)) = 1$
$\Rightarrow 0 < 1 \cdot x$
K2': $0 < x^2$

Beweis des Hilfssatzes: $(-x) \cdot (-x) = x^2$
Nach K3 gilt: $(-x) + x = 0$
$0 = 0 \cdot 0 = ((-x) + x) \cdot ((-x) + x) \stackrel{\text{D}}{=} ((-x) + x) \cdot (-x) + ((-x) + x) \cdot x$
$\stackrel{\text{K3}}{=} ((-x) + x) \cdot (-x) + 0 \cdot x = ((-x) + x) \cdot (-x) + 0 \stackrel{\text{K4}}{=} 0 + ((-x) + x) \cdot (-x)$
$\stackrel{\text{K2}}{=} ((-x) + x) \cdot (-x) \stackrel{\text{D}}{=} (-x) \cdot (-x) + x \cdot (-x)$
Addition von $x \cdot x$: $x \cdot x = x \cdot x + ((-x) \cdot (-x) + x \cdot (-x)) \stackrel{\text{K1,K4}}{=} (x \cdot x + (-x) \cdot x) + (-x) \cdot (-x) \stackrel{\text{K4,D}}{=} x \cdot (x + (-x)) + (-x) \cdot (-x) \stackrel{\text{K3}}{=} x \cdot 0 + (-x) \cdot (-x) = 0 + (-x) \cdot (-x)$
$\stackrel{\text{K2}}{=} (-x) \cdot (-x)$
$\Rightarrow x \cdot x = (-x) \cdot (-x)$

Beweis für (vi): Benutze Axiom O2, addiere $-x$, resp. x
Beweis für (vii): Spezialfall $y = 0$ von (vi).
Beweis für (viii): Spezialfall von (vii). Setze $x = (-x)$ und benutze $-(-x) = x$.
Beweis für (ix): $x < y \stackrel{\text{(vi)}}{\Leftrightarrow} 0 < y - x = y + (-x) = -x - (-y) \stackrel{(vi)}{\Leftrightarrow} -y < -x$

1.6 Körper der komplexen Zahlen

$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Addition:} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \stackrel{+}{\to} & \mathbb{C} \\ ((x,y),(x',y')) & \mapsto & (x + x', y + y') \end{array}$$

$$\text{Multiplikation:} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \stackrel{\cdot}{\to} & \mathbb{C} \\ ((x,y),(x',y')) & \mapsto & (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x') \end{array}$$

- $0 = (0, 0)$
- $1 = (1, 0)$
- $i := (0, 1)$
- $i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 - 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1 \Rightarrow i^2 = -1$

Die Menge der komplexen Zahlen $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kann mit der reellen Gerade $\mathbb{R}$ identifiziert werden:

- $(x, 0) \cdot (x', 0) = (x \cdot x', 0)$
- $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$
- $(x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$

Notation: $x \in \mathbb{R}$ wird mit $(x, 0)$ in $\mathbb{C}$ identifiziert. Dann gilt:
$\boxed{z = (x, y) = x + yi, \ x, y \in \mathbb{R}}$.

1.7 Archimedisches Axiom

Ein Körper K heißt *archimedisch* (angeordnet), falls für alle $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $x < n$.
Folgerung: Für alle $\varepsilon > 0$ aus K existiert $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, so daß $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ $(n > \varepsilon^{-1})$.

1.8 Dichtigkeitssatz

Die rationalen Zahlen liegen *dicht* in jedem archimedischen Körper K: Für alle x aus K und jedes $\varepsilon > 0$ aus K existiert ein $q \in \mathbb{Q}$, so daß $x - \varepsilon < q < x + \varepsilon$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBdA) kann man ε durch $\varepsilon = \frac{1}{n}$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ ersetzen. Es genügt, ein $y \in \mathbb{Z}$ zu finden mit $\tilde{x} - 1 < y < \tilde{x} + 1$ $(\tilde{x} := n \cdot x)$ $(q := \frac{y}{n})$
In $\mathbb{Z} \cap \{\tilde{y} | \tilde{x} - 1 < \tilde{y}\}$ gibt es eine kleinste Zahl. Diese kleinste Zahl sei y.
Es gilt dann automatisch $y < \tilde{x}+1$. Wäre nämlich $y \geq \tilde{x}+1$, dann wäre $y-1 \geq \tilde{x} > \tilde{x}-1$ und gleichzeitig $y - 1 \in \mathbb{Z}$. Widerspruch!

1.9 Bernoullische Ungleichung

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Sei $x \neq 0, x > -1$ eine Zahl aus einem angeordneten Körper K. Dann gilt: $(1 + x)^n > 1 + n \cdot x$.

Beweis: vollständige Induktion. Für $n = 2$ folgt das aus der binomischen Formel $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ (da $x \neq 0$).
Induktionsschluß: $n \rightsquigarrow n + 1$
Es gelte $(1 + x)^n > 1 + nx$
$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \overset{1+x>0}{>} (1 + x)(1 + nx) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \overset{n>0, x^2>0}{>} 1 + (n + 1)x$

1.10 Betragsfunktion

$$\begin{aligned} |.| : \quad K &\to K_{\geq 0} \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Folgerungen: Für alle x, y aus K gilt:

(i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

(iii) $x \leq |x|$

Beweis für (ii): ObdA $x \neq 0$, da andernfalls die Aussage trivial ist. Dann ist auch $|x| \neq 0,\ |x| > 0$.
Wir zeigen zuerst, daß $|x^{-1}| = |x|^{-1}$:

$$\begin{aligned} |xx^{-1}| &= |x| \cdot |x^{-1}| \\ 1 &= |x| \cdot |x^{-1}| \\ |x|^{-1} &= |x^{-1}| \end{aligned}$$

Gilt die Dreiecksungleichung, dann ist:

$$\begin{aligned} |x^{-1}| \cdot |x+y| &\leq |x+y| \cdot |x^{-1}| \\ |x^{-1}| \cdot |x+y| &\leq 1 + |x^{-1}| \cdot |y| \\ |x^{-1} \cdot (x+y)| &\leq 1 + |x^{-1}y| \\ |1 + x^{-1}y| &\leq 1 + |x^{-1}y| \end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen: $\forall z \in K : |1+z| \leq 1 + |z|$ $(*)$
Fallunterscheidung:

1. Fall: $(z \geq 0)$. Dann ist $1 + z \geq 0$. Dann ist $(*)$ äquivalent zu $1 + z \leq 1 + z$.
2. Fall: $(z < -1) \Rightarrow 1 + z < 0$
   $(*)$: $-(1+z) \leq 1 + (-z) \Leftrightarrow 0 \leq 2$
3. Fall: $(-1 \leq z < 0)$. Dann ist $1 + z \geq 0,\ z < 0$
   $(*)$: $1 + z \leq 1 + (-z) \Leftrightarrow z \leq -z \Leftrightarrow z \leq 0$

1.10.1 Definition – Distanz

Wir betrachten neben dem Betrag $|.|$ häufig auch die *Distanz* $d(x,y)$ zwischen zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$. $d(x,y) := |x-y|$.

2 Folgen und Reihen

2.1 Definition – Folge

Sei X eine Menge. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to X \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

heißt Folge mit Werten in X.
Von besonderem Interesse ist der Fall, daß X ein archimedischer Körper ist.
Dies sei in Folge vorausgesetzt!

2.2 Definition – Cauchyfolge

Sei K ein archimedischer Körper. Eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit Werten in K heißt *Cauchyfolge*, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ aus $\mathbb{Q}$ gibt es eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ aus $\mathbb{N}$, so daß $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$.

2.3 Definition – Konvergenz

Eine Folge heißt *konvergent* mit Grenzwert $x \in K$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ existiert $N = N(\varepsilon)$, so daß gilt: $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$.
Ist speziell $x = 0$, nennt man $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge.

2.4 Definition – Cauchyvollständige Körper

Der archimedische Körper K heißt *(cauchy-)vollständig* , falls jede Cauchyfolge in K eine konvergente Folge ist.
Bemerkung: $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig!

1. Satz: Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Insbesondere folgt: Ist K vollständig, dann ist eine Folge genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

2. Satz: Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. Man schreibt deshalb $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ oder $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

3. Satz: Jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt, d.h. es existiert ein $C \in K$, so daß gilt $|x_n| \leq C$ for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.

4. Satz: Sind $(x_n)_{n\geq 0}$ und $(y_n)_{n\geq 0}$ Cauchyfolgen in K, dann sind auch $(z_n)_{n\geq 0} = (x_n \pm y_n)_{n\geq 0}$ und $(z_n)_{n\geq 0} = (x_n \cdot y_n) > n \geq 0$ Cauchyfolgen in K.
   Zusatz: Falls $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ konvergieren, dann konvergieren auch die obigen Folgen $(z_n)_{n\geq 0}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = (\lim_{n\to\infty} x_n) \pm (\lim_{n\to\infty} y_n)$ bzw. $\lim_{n\to\infty} z_n = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)$.
   Falls $(y_n)_{n\geq 0}$ konvergiert mit Grenzwert $y \neq 0$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

   - $y_n \neq 0$ für alle $n \geq N$.
   - Die Folge $z_n = \begin{cases} z_n & \text{beliebig für } n < N \\ y_n^{-1} & n \geq N \end{cases}$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} z_n = y^{-1}$.

5. Satz: Jede monoton fallende (wachsende) Folge $x_n \geq x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n \leq x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N})$, welche nach unten (oben) beschränkt ist, ist eine Cauchyfolge.

Beweis von Satz 1: Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ konvergent mit Grenzwert x. Dann gilt $d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m|$.
Dreiecksungleichung: $|x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| = d(x_n, x) + d(x, x_m) = d(x_n, x) + x(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \forall n, m \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Beweis von Satz 2: Seien x, y Grenzwerte einer Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ aus K. Dann gilt: $|x-y| = |x-x_n+x_n-y| \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\Longrightarrow} |x-y| \leq |x-x_n| + |x_n-y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, falls $n \geq N_x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ und $n \geq N_y\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.
Archimedisches Axiom: Es gibt ein $n \geq \max\left(N_x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_y\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \Rightarrow |x-y| < \varepsilon$ (für alle $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$). Es gilt insbesondere: $0 \leq |x-y| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y$.

2.5 Definition – Körper der reellen Zahlen

Einen vollständigen, archimedischen Körper nennen wir Körper der reellen Zahlen.
Notation: $K = \mathbb{R}$.
Bemerkung: Aus der Existenz von $\mathbb{Q}$ kann man die Existenz eines vollständigen, archimedischen Körpers herleiten.

2.6 Zangenlemma

Seien (x_n), (y_n) und (z_n) drei reelle Folgen, so daß die beiden Folgen (x_n) und (z_n) gegen $l \in \mathbb{R}$ konvergieren und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \leq y_n \leq z_n$. Dann konvergiert auch (y_n) gegen l.

2.7 Definition – Reihe

Eine Reihe ist eine spezielle Folge vom Typ $x_n = \sum_{i=0}^{n} y_i$.
Beispiel: $y_i = (-1)^i \cdot \frac{1}{i+1}$

2.8 Cauchy-Kriterium / Hauptlemma

Eine Reihe $\sum x_n$, $x_n \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn gilt: $|\sum_{i=n}^{m} x_i| \leq \varepsilon$ für alle $m \geq n \geq N(\varepsilon)$.

Beweis: Sei $S_n = \sum_{i=0}^{n}$ die Folge der Partialsummen. Dann gilt: S_n konvergiert $\overset{K=\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}$ S_n ist eine Cauchyfolge $\Leftrightarrow \forall\varepsilon\exists N : d(S_n, S_m) = |\sum_{i=n+1}^{m} x_i| < \varepsilon \forall n, m > N$
1. Folgerung (Leibniz'sches Konvergenz-Kriterium): Sei x_n eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n$.
2. Folgerung: Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, dann ist x_n eine Nullfolge.

Beweis: Folgt aus dem Hauptlemma: Setze $m = n$: $|x_n| < \varepsilon \forall n \geq N(\varepsilon)$.

2.9 Lemmas

- $x_n = \frac{1}{1+x\cdot n}$ ist eine Nullfolge, falls $x \neq 0$.
- Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann ist die Folge $x_n = q^n$ genau dann eine konvergente Folge, wenn $|q| < 1$ oder $q = 1$. Im Fall $|q| < 1$ ist der Grenzwert 0, für $q = 1$ ist der Grenzwert 1.

2.10 Geometrische Reihe

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$ konvergiert für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$

Beweis:

1. Beweis der Formel $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$; $q \neq 1$: vollständige Induktion:

   Induktionsanfang: $N = 0 : \displaystyle\sum_{n=0}^{0} q^n = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}$.

   Induktionsschluß: $N \rightsquigarrow N{+}1$: $\displaystyle\frac{1-q^{N+1}}{1-q} + q^{N+1} = \frac{1-q^{N+1}+\left(q^{N+1}-q^{N+2}\right)}{1-q} = \frac{1-q^{N+2}}{1-q}$

2. Grenzwert: $y_n := \displaystyle\sum_{n=0}^{N} q^n$, $|q| < 1$

   Es gilt: $y_n = \displaystyle\frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{=:a_n} - \underbrace{\frac{q}{1-q}}_{=:b_n} \cdot q^N$.

   Die Folgen a_n, b_n, q^N konvergieren gegen $\displaystyle\frac{1}{1-q}, -\frac{q}{1-q}, 0$.

   Es folgt $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$ für $|q| < 1$.

2.11 Verdichtungstrick

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Folge und sei $a_n \geq 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ konvergiert

2.12 Majorantenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine reelle Folge der Art, daß $|a_n| \leq C_n \forall n$. Hierbei sei C_n irgendeine Folge nicht negativer Zahlen. Dann gilt: Falls $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Falls ein solcher Fall vorliegt nennt man $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

Beweis: Wir benutzen das Cauchykriterium:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \left|\sum_{n=\nu}^{\mu} a_n\right| < \varepsilon, \text{ falls } N \leq \nu \leq \mu \text{ (A).}$$

(C): $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \sum_{n=\nu}^{\mu} C_n < \varepsilon$.
Zu zeigen: (C)$\Rightarrow$(A): Dies folgt aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung:

$$\left| \sum_{n=\nu}^{\mu} a_n \right| \leq \sum_{n=\nu}^{\mu} |a_n| \leq \sum_{n=\nu}^{\mu} C_n < \varepsilon$$

2.13 Exponentialreihe

Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut. Den Grenzwert nennt man $\exp(x)$.

Beweis: Wir suchen eine Majorante der Gestalt $C_n = \text{const} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für alle $n \geq N$.

Wie finden wir C_n und N?
Wähle ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $m > |x|$ und setze $N = 2m$.
Es gilt für $n \geq N$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &= \frac{|x|^n}{n!} = \underbrace{\prod_{k=1}^{N} \frac{|x|}{k}}_{\text{const}_1} \cdot \prod_{k=N+1}^{n} \underbrace{\frac{|x|}{k}}_{\leq \frac{|x|}{N} \leq \frac{1}{2}} \\ &\leq \text{const}_1(x) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \text{const}(x) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \ \text{const}(x) := \text{const}_1(x) \cdot 2^{-N} \end{aligned}$$

2.14 Binomialtheorem

Sei K ein archimedischer Körper. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ganze Zahlen $\binom{a}{b} \in \mathbb{N}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$, so daß gilt

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Es gilt außerdem:

1. $\binom{n}{i} = \begin{cases} 0 & i \notin [0, n] \\ \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} & i \in [0, n] \end{cases}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

2.15 Hilfssatz – Grenzwert von Folgen in einem Intervall

Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine konvergente Folge von Zahlen $y_n \in [a,b]$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in [a,b]$.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine konvergente Folge mit $x_n \leq b$ für (fast) alle n. Zu zeigen ist $x := \lim_{n\to\infty} x_n \leq b$.
Wäre $x > b$, dann existiert ein $\varepsilon > 0 \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \varepsilon < x - b$ (Eudoxos; $\varepsilon = \frac{1}{n}$).
Es gilt $d(x_n, n) < \varepsilon$, falls $n \geq N = N(\varepsilon)$. Somit $0 < \underbrace{x - b}_{>\varepsilon} = x - x_n + \underbrace{x_n - b}_{\leq 0} \leq \underbrace{x - x_n}_{<\varepsilon}$
Dies impliziert den Widerspruch $\varepsilon < \varepsilon$, denn $\varepsilon < x - b \leq x - x_n \leq |x - x_n| < \varepsilon$. Es folgt $x = \lim_{n\to\infty} x_n \leq b$.
Analog beweist man den Fall $x_n \geq a$.

2.16 Satz – Die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Die Folge $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert und hat den Grenzwert $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} n^{-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(n-i+1)\cdot(n+i)\cdot \cdots \cdot n}{i!} \cdot n^{-i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \prod_{\nu=1}^{i} \frac{n+1-\nu}{n} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \prod_{\nu=1}^{i} \left(1 - \frac{\nu-1}{n}\right);\ 0 < 1 - \frac{\nu-1}{n} < 1, \text{da } 1 \leq \nu \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Offensichtlich folgt: $0 < \prod_{\nu=1}^{i} \left(1 - \frac{\nu-1}{n}\right) < 1$

Daraus folgt $x_n \leq \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \leq e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$. Der Hilfssatz liefert $0 \leq y_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \leq e$.

1. Aus $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)$ folgt die Monotonie der Folge: $x_n \geq x_m$, falls $n \geq m$:

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \underbrace{\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)}_{\geq 0} \geq y_{n,m} := \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \\
y_{n,m} \geq x_m &= \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{m}\right), \text{da } 1 - \frac{\nu}{n} \geq 1 - \frac{\nu}{m} \Leftrightarrow \frac{\nu}{m} \geq \frac{\nu}{n} \Leftarrow m \leq n
\end{aligned}$$

Aus den obigen Ungleichungen folgt insbesondere $x_n \geq x_m$.

2. Konvergenz der Folge x_n: Da x_n monoton wächst, genügt es zu zeigen, daß $x_n \leq$ const (für eine geeignete Konstante const aus $\mathbb{R}$). Was ist eine geeignete Schranke?

$$x_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \underbrace{\left(1 - \frac{\nu}{m}\right)}_{\leq 1} \leq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} =: z_n \forall n \geq m$$

Anwendung des Hilfssatzes für $z_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ und $a := x_m$ ergibt $x_m \leq \lim_{n\to\infty} z_n = e$.
Der Hilfssatz kann auch auf $(x_m)_{m \geq 0}$ und $b := e$ angewendet werden: $\boxed{\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq e \ (1)}$.

3. Die untere Schranze: In 1. wurde gezeigt, daß $(x_n - y_{n,m}) \geq 0 \forall n \geq m$. Der obige Hilfssatz liefert für festes m: $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_{n,m}) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_{n,m} \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} y_{n,m} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)}_{=1} = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_{n,m} = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} = z_m$$

Der Hilfssatz liefert für $z_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}$, $b = \lim_{n\to\infty} x_n$: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq e \ (2)}$.

(1) und (2) zusammen ergeben: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$

2.17 Umordnungssatz

Definition: Eine Umordnung ist definiert durch eine bijektive Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$.
Eine bijektive Abbildung hat insbesondere die Eigenschaft:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : [0, n] \cap \mathbb{N} \subseteq \alpha\left([0, n] \cap \mathbb{N}\right)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m(n)$, so daß $\alpha :\ m = m(n) \mapsto n$.
Gegeben: ein Intervall $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Setze $M := \max\left(\{m(0), m(1), \ldots, m(N)\}\right)$.
Dann gilt: $\alpha\left(\{0, 1, 2, \ldots, M\}\right) \supseteq \alpha\left(\{m(0), m(1), \ldots, m(N)\}\right) = \{0, 1, \ldots, N\}$. Also existiert für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $M \in \mathbb{N}$, so daß $\alpha\left(\{0, 1, \ldots, M\}\right) \supseteq \{0, 1, \ldots, N\}$

Umordnungssatz: Sei $\sum_{x=0}^{\infty} x_n$ absolut konvergent. Sei $\alpha : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung (Umordnung). Sei $y_n := x_{\alpha(n)}$ (die mit Hilfe von α umgeordnete Folge). Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergent mit Limes $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

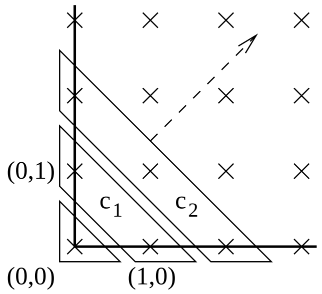
Beweis:

1. Setze $s_m = \sum_{n=0}^{m} x_n$. Nach Annahme konvergiert $s_m \to s$.
2. Nach Cauchykriterium gilt:
$$(*):\ \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=n}^{m} |x_i| \right| < \varepsilon \forall N = N(\varepsilon) \le n \le m$$
3. Für gegebenes $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ wie oben in $(*)$ existiert ein $M \in \mathbb{N} = M(\varepsilon, N)$, so daß
$$\alpha(\{0,1,\dots,M\}) \supseteq \{0,1,\dots,N\} \text{ d.h. } \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \subseteq \{y_0, y_1, \dots, y_M\}$$
4. Sei nun $m \ge M = M(\varepsilon, N)$ beliebig. Sei $\widetilde{s_m} := \sum_{n=0}^{m} y_n$. Dann gilt:
$$|\widetilde{s_m} - s_m| = \left| \sum_{n=0}^{m} y_n - \sum_{n=0}^{m} x_n \right| \overset{!}{=} \left| \sum_{i=N+1}^{K} \varepsilon_i \cdot x_i \right|$$
Hierbei sind $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ geeignete Zahlen und $K = K(\varepsilon, N, m)$ eine geeignete natürlich Zahl, welche größer oder gleich $N+1$ ist.
5. Es folgt aus 4.:
$$|\widetilde{s_m} - s_m| \le \sum_{i=N+1}^{K} \underbrace{|\varepsilon|}_{\in\{0,1\}} \cdot |x_i| < \left| \sum_{i=N+1}^{K} |x_i| \right| \overset{(*)}{<} \varepsilon$$
falls $N+1$ und $K \ge N = N(\varepsilon)$. Dies ist aber nach Konstruktion erfüllt.
6. Schluß des Beweises: $\widetilde{s_m} = (\widetilde{s_m} - s_m) + s_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 + s_m$, denn $\widetilde{s_m} - s_m$ ist eine Nullfolge (Für $\varepsilon > 0 \exists M$, so daß $|\widetilde{s_m} - s_m| < \varepsilon \forall m \ge M$). Also konvergiert $\widetilde{s_m}$ (als Summe zweier konvergenter Folgen) und hat den Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \widetilde{s_m} = s$.

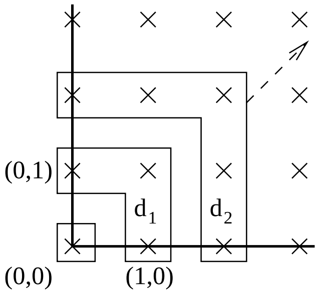
2.18 Doppelreihensatz

Aus dem Umordnungssatz folgt der Doppelreihensatz: Seien $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ zwei gegebene absolut konvergente Reihen. Definiere eine Folge $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$. Die Folge c_n heißt Cauchyfaltung der Folgen a_n und b_n: $c_n = (a * b)_n$. Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ absolut und es gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} c_i = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i) \cdot (\sum_{i=0}^{\infty} b_i)$.

Beweis: Der Beweis wird auf den Umordnungssatz zurückgeführt:



$$c_0 = a_0 b_0$$
$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$$
$$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$
$$\vdots$$



$$
\begin{aligned}
d_0 &= a_0 b_0 \\
d_1 &= a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_1 \\
d_2 &= a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_0 b_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Wie wollen zeigen:

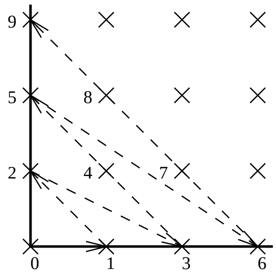
$$(*) : \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k$$

Wir zeigen zuerst, daß $(*)$ den Doppelreihensatz impliziert. Dazu genügt es zu zeigen, daß

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} d_k \right) &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{(i,j)\in\{0,\dots,N\}^2} a_i \cdot b_j \right) = \lim_{N\to\infty} \left(\left(\sum_{i=0}^{N} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} b_j \right) \right) \\
&= \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} a_i \right) \cdot \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} b_j \right)
\end{aligned}
$$

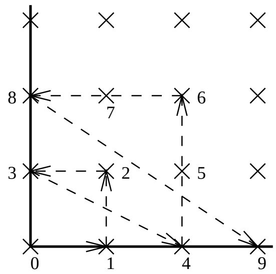
Beweis von $(*)$: Wir wollen den Umordnungssatz anwenden: Wir wählen zwei Bijektionen ψ, φ

$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$



$$
\begin{aligned}
\psi(0) &= (0,0) \\
\psi(1) &= (1,0) \\
\psi(2) &= (0,1) \\
\psi(3) &= (2,0) \\
\psi(4) &= (1,1) \\
\psi(5) &= (0,2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$



$$
\begin{aligned}
\varphi(0) &= (0,0) \\
\varphi(1) &= (1,0) \\
\varphi(2) &= (1,1) \\
\varphi(3) &= (0,1) \\
\varphi(4) &= (2,0) \\
\varphi(5) &= (2,1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$(**) : \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} (a_i \cdot b_j)_{(i,j)=\varphi(k)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} (a_i \cdot b_j)_{(i,j)=\psi(k)}$$

Beide Reihen sind absolut konvergent.

Schritt 1: Beweis von $(**)$: $(**)$ folgt aus dem Umordnungssatz, falls bereits eine der beiden Seiten von $(**)$ eine absolut konvergente Folge definiert! (Die Umordnung ist $\alpha = \psi^{-1} \circ \varphi$).
In der Tat konvergiert die linke Seite von $(**)$ absolut, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} |a_i \cdot b_j|_{(i,j)=\varphi(k)} &\leq \sum_{(i,j)\in\text{genuegend grosses Quadrat}} |a_i| \cdot |b_j| \\
&\stackrel{\text{DG}}{=} \left(\sum_{i=0}^{\text{Oberkante d. Quadrats}} |a_i| \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\text{Oberkante d. Quadrats}} |b_j| \right) \\
&< \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right)
\end{aligned}$$

, da beide Folgen monoton wachsen.

Schritt 2: Beweis von $(*)$: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k$: Beachte, daß $\sum_{k=0}^{N} c_k$ eine Teilfolge der rechten Seite und $\sum_{k=0}^{N} d_k$ eine Teilfolge der linken Seite von $(**)$ ist:

c_0 =1. Partialsumme, $c_0 + c_1$ =3. Partialsumme, $c_0 + c_1 + c_2$ =6. Partialsumme der rechten Seite, ...

d_0 =1. Partialsumme, $d_0 + d_1$ =4. Partialsumme, $d_0 + d_1 + d_2$ =9. Partialsumme der linken Seite, ...

Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert und besitzt den selben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge. Daraus folgt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \text{linke Seite von } (**) = \text{rechte Seite von } (**) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

Damit ist $(*)$ und somit der Doppelreihensatz gezeigt.

2.19 Quotienten-Kriterium

Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von reellen, nicht verschwindenden Zahlen, so daß der folgende Grenzwert existiert:

$$c := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$$

Dann gilt:

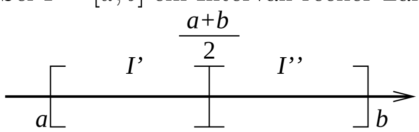
- Ist $c < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n\geq 0} x_n$.

- Ist $c > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{n\geq 0} x_n$.
- Ist $c = 1$, so ist keine Aussage möglich.

Beweis: Der Fall $c < 1$:
Sei $\varepsilon = \dfrac{1-c}{2} > 0$
Da $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \to c$ gibt es ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq N$ gilt: $\left|\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| - c\right| < \varepsilon$.
Insbesondere $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| - c < \varepsilon$, also $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| < \varepsilon + c =: q < 1$.
Aus $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q \forall n \geq N$ folgt $|x_n| \leq q\,|x_{n-1}| \leq q^2\,|x_{n-2}| \ldots \leq q^{n-N}\,|q_N|$.
Nach Majorantenkriterium konvergiert $\sum\limits_{n\geq N} |x_n|$, da $\sum\limits_{n\geq N} q^{n-N} \cdot |x_N|$ konvergiert.

2.20 Intervallschachtelung

Sei $I = [a, b]$ ein Intervall reeller Zahlen x, $a \leq x \leq b$.



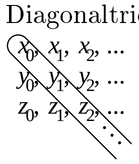
$\dfrac{a+b}{2} = a + \left(\dfrac{b-a}{2}\right) = b - \left(\dfrac{b-a}{2}\right)$.

Aus I enthält man zwei neue Intervalle $I' = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ und $I'' = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$; $I = I' \cup I''$.

2.21 Satz – Konvergente Teilfolgen

Jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: (benutzt Intervallschachtelung) Nach Annahme existiert ein Intervall $x_n \in I = [a, b] \forall n \in \mathbb{N}$. Da $\mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist und $\mathbb{N} = A \cup B$ mit $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in I'\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in I''\}$
Entweder A oder B (oder beide) ist daher eine unendliche Menge. Ist A unendlich, dann setze $I_1 = I'$. Ist A endlich (somit B unendlich), setze $I_1 = I''$.
Folgerung: Die Folge x_n enthält eine Teilfolge mit Werten in I_1 (wähle eine Bijektion von $A \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ resp. $B \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$).
Beispiel: A sei unendlich. $A = \{2, 5, 9, \ldots\}$, dann ist $y_0 = x_2$, $y_1 = x_5$, $y_2 = x_9$, ... eine Teilfolge der Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ und es gilt: $y_m \in I_1 \forall m$.
Iteration: Man erhält sukzessive Intervalle $I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$.
Für die Längen der Intervalle gilt: Länge von $I_n = [a_n, b_n] = b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$.
Diagonaltrick:



Die Diagonalfolge $x_0, y_1, z_2, \ldots$ ist eine Teilfolge(!) der ursprünglichen Folge.
Die Teilfolge konvergiert: Es genügt zu zeigen, daß X_n eine Cauchyfolge ist. Also: Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Zu finden ist eine natürliche Zahl N, so daß gilt $n, m \geq N \Rightarrow d(X_n, X_m) < \varepsilon$. $n, m \geq N \Rightarrow X_n, X_m \in I_N$. Somit gilt $d(X_n, X_m) \leq$Länge$(I_N) = 2^{-N}(b-a)$. Wähle N so groß, daß $2^{-N}(b-a) < \varepsilon$: $2^N > \frac{b-a}{\varepsilon}$.

2.22 Definition – Maximum

Sei X eine (nach oben und unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ein Punkt x heißt ein *Maximum* von X, falls gilt

(i) $x \in X$

(ii) Für alle $y \in X$ gilt $y \leq x$

Beispiel: $X = (0,1)$ ist beschränkt, besitzt aber kein Maximum!
Fakt: Falls das Maximum von X existiert, ist es eindeutig bestimmt.

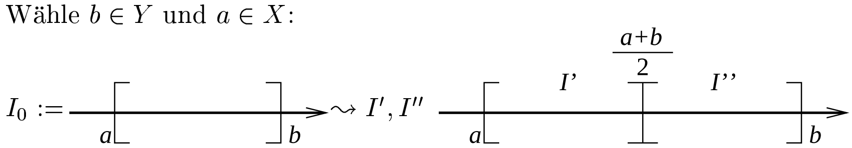
Beweis: x und x' seinen Maxima von X, dann gilt $x \leq x'$ und $x' \leq x$ (jeweis wegen (i) und (ii)), somit ist $x = x'$.

2.23 Definition – Supremum

Satz: Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Menge. Die Menge $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq x \forall x \in X\}$ besitzt ein Minimum. Dieses Minimum ist eindeutig bestimmt und heißt *Supremum* von X.

Beispiel: $X = (0,1)$, $\sup(X) = 1 = \min[1, \infty)$.

Beweis: Da X nach oben beschränkt ist, ist Y eine nichtleere Menge (Y ist die Menge aller oberen Schranken von X).
Wähle $b \in Y$ und $a \in X$:



Wähle nun I_1 als I' oder I'', so daß der linke Randpunkt a_1 in X und der rechte Randpunkt b_1 in Y liegt (abhängig davon, ob $c = \frac{a+b}{2}$ in Y oder X liegt).
Iteration: $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$

1.) $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \ldots$ in X, nach oben von b beschränkt

2.) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \ldots$ in Y, nach unten von a beschränkt wobei $I_n = [a_n, b_n]$. Es folgt aus Monotonie und Beschränktheit $a_i \nearrow \xi$, $b_i \searrow \eta$.

3.) $a_n \leq b_n$ und $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$.

Es gilt: $\boxed{\xi = \eta}$ wegen $\eta - \xi = (\eta - b_n) + (b_n - a_n) + (a_n - \xi) \to 0$
$\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} : x \leq b_n$ (da $b_n \in Y$)
Es folgt $x \leq \lim_{n\to\infty} b_n = \eta$, also $\boxed{\eta \in Y}$.
Angenommen, es gäbe $y \in Y$ mit $y < \eta$ Dann gilt $foralln \in \mathbb{N} a_n \leq y$, da $a_n \in X$. Im Limes folgt $\xi = \lim_{n\to\infty} a_n \leq y$. Also wäre $\xi \leq y < \eta \Rightarrow \xi \neq \eta$. Widerspruch! Also: $\boxed{\eta = \min(Y)}$.

3 Exkurs in die lineare Algebra

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{=:x} | x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

3.1 Skalare Multiplikation

$$\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, \ldots x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

3.2 Addition

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

3.3 Skalarprodukt

$$(x, y) = ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \in \mathbb{R}$$

3.4 Norm

$$N(x) = \|x\| = {}_{+}\sqrt{(x, x)}$$

(wohldefiniert, da $x \cdot x \geq 0$).
Beachte: $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0 = (0, \ldots, 0)$ gilt $(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i^2}_{\geq 0} > 0$
Folgerung: $\|x\|$ resp. $\|x\|^2 = (x, x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ mit Gleichheit nur im Fall $x = 0$.

3.5 Schwartz-Ungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Beweis: Gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x = t \cdot y$ (x und y sind proportional), dann ist die

Aussage trivial!
ObdA: x und y seien nicht proportional. Betrachte:

$$0 < (x - ty, x - ty) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - ty_i)^2 = \|x\|^2 - 2t(x, y) + t^2\|y\|^2 \forall t \in \mathbb{R}$$

Für $y \neq 0$ folgt:

$$t^2 - \frac{2t(x,y)}{\|y\|^2} + \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \frac{2(x,y)}{\|y\|^2} t + \left(\frac{(x,y)}{\|y\|^2}\right)^2 > \frac{(x,y)^2}{\|y\|^4} - \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} = \frac{(x,y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2}{\|y\|^4}$$

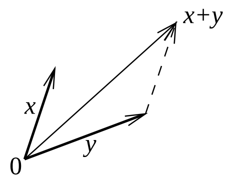
keine Nullstelle $\Rightarrow (x, y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 < 0$

Zusatz: Sind x und y nicht proportional, gilt "$<$", sonst "$=$".

Folgerung: Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Beispiel: $\mathbb{R}^2$:



Beispiel: $\mathbb{R}^1$: $\|x\| = {}_{+}\sqrt{x^2} = |x|$

Beweis: Da beide Seiten der Dreiecksungleichung positiv sind, genügt zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
\Leftrightarrow (x+y, x+y) &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
\Leftrightarrow (x,y) &\leq \|x\| \cdot \|y\|
\end{aligned}$$

Letzteres folgt aus der Schwartz-Ungleichung.

3.6 Metrische Räume

X sei eine Menge und

$$\begin{aligned}
d: \quad X \times X &\to \mathbb{R} \\
(x, y) &\mapsto d(x, y)
\end{aligned}$$

Ein solches Paar (X, d) heißt metrischer Raum, falls d die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x, y \in X$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \forall x, y, z \in X$

1. Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x - y|$

2. Beispiel: $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \|x - y\|$

zu (i): $z := x - y$: $\|z\| \geq 0$ und $\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ also folgt $\|x - y\| \geq 0$ und $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$

zu (ii): Es genügt zu zeigen: $\|z\| = \| - z\|$. Beachte:

$$\|z\| = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (-z_i)^2} = \| - z\|$$

zu (iii): $d(x,y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(z,y)$

3. Beispiel: Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge, dann ist (Y,d) wieder ein metrischer Raum.

1. Definition: Eine Folge $x_n \in X$ heißt konvergent im metrischen Raum (X,d), falls gilt:

$$\exists x \in X : \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \; d(x, x_n) < \varepsilon$$

Fakt: Falls x_n in diesem Sinn konvergiert, ist $x \in X$ eindeutig bestimmt und heißt Limes $x = \lim_{n \to \infty} x_n$

2. Definition: Eine Folge $x_n \in X$ heißt Cauchyfolge im metrischen Raum (X,d) falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Fakt: Jede konvergente Folge in (X,d) ist eine Cauchyfolge in (X,d).

3. Definition: (X,d) heißt (cauchy-)vollständig, falls jede Cauchyfolge in X eine konvergente Folge ist.

1. Beispiel: $(X,d) = (\mathbb{R}, d(x,y) = |x - y|)$

2. Beispiel: (X,d) mit $X = [a,b]$, $d(x,y) = |x - y|$. Beachte, daß für eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge x_n mit $x_n \in [a,b]$ gilt: $\lim_{n \to \infty} x_n \in [a,b]$.

3.7 Fixpunktsatz

Sei (X,d) ein (cauchy-)vollständiger metrischer Raum. Sei $f: X \to X$ eine Abbildung, welche **kontraktiv** ist, d.h.

$$\exists 0 \leq \kappa < 1: \ d(f(x), f(y)) \leq \kappa d(x,y)$$

Dann existiert ein *eindeutig bestimmter* Punkt $\xi \in X$ mit $f(\xi) = \xi$.

Beweis der Eindeutigkeit: Seien ξ und ξ' aus X Fixpunkte. Dann gilt $d(\xi,\xi') = d(f(\xi), f(\xi')) \leq \kappa \cdot d(\xi,\xi')$. Da $0 \leq \kappa < 1$ und $d(\xi,\xi') \geq 0$ folgt $d(\xi,\xi') = 0$. Es folgt $\xi = \xi'$!

Beweis der Existenz: Wir wählen $x_0 \in X$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ...
Hilfsbetrachtung:

$$\begin{aligned} d(x_0,x_n) &\leq d(x_0,x_1) + d(x_1,x_2) + \ldots + d(x_{n-1},x_n) \\ &\leq d(x_0,x_1) + \kappa d(x_0,x_1) + \kappa^2 d(x_0,x_1) + \ldots + \kappa^{n-1} d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

Beachte:

$$d(x_2,x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \kappa \cdot d(x_1,x_2) = \kappa \cdot d(f(x_0), f(x_1)) \leq \kappa^2 \cdot d(x_0,x_1)$$

Da $|\kappa| < 1$ und da $\dfrac{1}{1-\kappa} = 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots$ (geom. Reihe) erhält man

$$\boxed{d(x_0,x_n) \leq \frac{d(x_0,x_1)}{1-\kappa}}$$

Es folgt $\forall n,m \in \mathbb{N}\ d(x_n,x_m) \leq 2 \cdot \dfrac{d(x_0,x_1)}{1-\kappa}$

1. Schritt: Die Folge x_n ist eine Cauchyfolge in (X,d):

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \\ &\leq \kappa \cdot d(x_{n-1},x_{m-1}) \end{aligned}$$

Sei oBdA $n \leq m$: man erhält durch Iteration: $d(x_n,x_m) \leq \kappa^n \cdot d(x_0,x_{m-n})$.

Aus der Hilfsbetrachtung folgt: $\boxed{d(x_n,x_m) \leq \dfrac{\kappa^n}{1-\kappa} \cdot d(x_0,x_1)}$.

Es folgt $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall N \leq n \leq m\ d(x_n,x_m) < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^n}{1-\kappa} \cdot d(x_0,x_1) &< \varepsilon \\ \frac{\kappa^n}{1-\kappa} &< \frac{\varepsilon}{d(x_0,x_1)} \\ \kappa^n &< \underbrace{\frac{\varepsilon(1-\kappa)}{d(x_0,x_1)}}_{>0} \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist immer lösbar, da $\kappa^n \to 0$.

2. Schritt: Da X vollständig ist, konvergiert also x_n mit Limes $\boxed{\xi := \lim_{n\to\infty} x_n}$

3. Schritt: $d(\xi, f(\xi)) \le d(\xi, x_n) + d(x_n, f(\xi)) = d(\xi, x_n) + \kappa \cdot d(x_{n-1}, \xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, da $x_n \to \xi$.
Daher sind $d(\xi, x_n)$ und $d(x_{n-1}, \xi)$ reelle Nullfolgen und $d(\xi, f(\xi)) = 0$.
$x_n \to \xi$ heißt $\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N}:\ d(x_n, \xi) < \varepsilon \forall n \ge N$, d.h. $d(x_n, \xi) \to 0$

3.7.1 Eine Anwendung

$X = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}$
Wähle $f_y(x) = 1 + x - \exp(x) + y$.
Prof. Dr. Weissauer behauptet:

1) f_y ist kontraktiv
2) $f_y : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \forall y \in \left[-0.1, \frac{1}{2}\right]$

Was sind Fixpunkte: Für $y = 0$ ist $\xi = 0$ der eindeutige Fixpunkt.
Allgemein:

$$f_y(\xi) = \xi = 1 + \xi - \exp(\xi) + y \Leftrightarrow \exp(\xi) = 1 + y$$

Somit zeigt der Fixpunktsatz im vorliegenden Fall:

$$\underbrace{[0.9, 1.5]}_{1+y} \subseteq \exp\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$$

Der Fixpunktsatz liefert ein schnell konvergierendes Computerverfahren zur Berechnung von $f(x) = x$.

Beweis von Behauptung 1) $f = f_0$

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-x^n + y^n}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (y - x) \frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}}{n!} \\
&= (y - x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}}{n!} \\
|f(x) - f(y)| &= |y - x| \cdot \underbrace{\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}}{n!} \right|}_{=\kappa(x-y) \le \kappa < 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa(x,y) &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \max\left(|x|,|y|\right)^{n-1}}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\max\left(|x|,|y|\right)^{n-1}}{n-1!} \\
&= -1 + \exp\left(\max\left(|x|,|y|\right)\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1.64\ldots - 1 = 0.64\ldots
\end{aligned}$$

4 Stetige Abbildungen

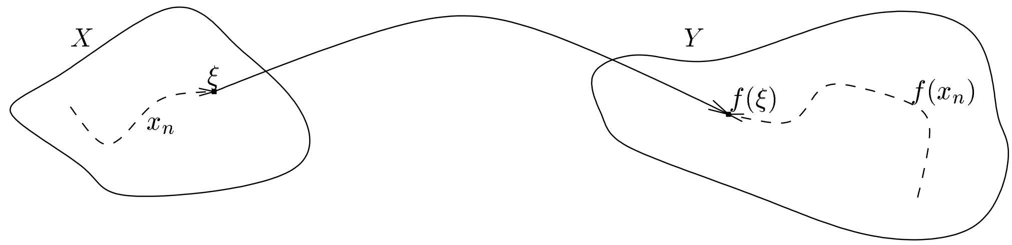
4.1 Definition – Stetigkeit

Stetige Abbildungen Sei (X, D_X) ein metrischer Raum und sei

$$\begin{aligned} f: \quad X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

eine Abbildung wobei (Y, d_Y) ein anderer metrischer Raum ist. Falls (X, d_X) der Raum $\mathbb{R}^n$ oder ein Intervall im $\mathbb{R}^n$ ist mit der Standardmetrik, schreiben wir kurz: $(X,d) = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ oder $[a,b]$.

Definition: Die Abbildung f heißt *stetig im Punkt* $\xi \in X$, falls gilt $x_n \to \xi$ impliziert $f(x_n) \to f(\xi)$



D.h. für jede in (X, d_X) konvergente Folge $x_n \in X$ mit Grenzwert $\xi \in X$ konvergiert die Bildfolge $y_n = f(x_n) \in Y$ und hat den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} y_n = f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$. Also:

$$\lim_{\substack{x_n \to \xi \\ n \to \infty}} f(x_n) = f\left(\lim_{\substack{x_n \to \xi \\ n \to \infty}} x_n\right)$$

Die Abbildung f heißt stetig auf ganz (X, d_X), falls f in allen Punkten $\xi \in X$ stetig ist. Mit anderen Worten: falls $\boxed{f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)}$

1. Beispiel:

$$\begin{aligned} f: \quad (X,d) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, x') \end{aligned}$$

hierbei sei $x' \in X$ ein beliebiger, fest gewählter Punkt von X (etwa: $X = \mathbb{R}$, $x' = 0$, $f(x) = |x|$).

Behauptung: $x \mapsto d(x, x')$ ist stetig.

Beweis: Sei $x_n \to \xi$ gegeben. D.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N y_n := d_X(x_n, \xi) < \varepsilon \ (*)$$

$\Leftrightarrow$ die reelle Folge y_n ist eine Nullfolge ($y_n = |y_n|$).
Zu zeigen ist: $x_n \to \xi$, dann konvergiert $d(x_n, x') \to d(\xi, x')$.
Mit anderen Worten

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : \forall n \geq M \ |d(\xi, x') - d(x_n, x')| < \varepsilon$$

Aus der Dreicksungleichung folgt $|d(\xi, x') - d(x_n, x')| \leq d(\xi, x_n) < \varepsilon$ (wegen $(*)$, falls $M = N$ gesetzt wird).

2. Beispiel:

$$\begin{aligned} f = \mathrm{id}_X : \quad (X, d_X) &\to (X, d_X) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

ist stetig, da $x_n \to \xi$ impliziert, daß $\mathrm{id}_X(x_n) = x_n \to \xi = \mathrm{id}_X(\xi)$.

3. Beispiel: konstante Abbildungen

$$\begin{aligned} f : \quad (X, d_X) &\to (Y, d_Y) \\ x &\mapsto \text{const} \end{aligned}$$

sind immer stetig, da gilt $f(x_n) = \text{const} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \text{const} = f(\xi)$.

4. Beispiel:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x = (x(1), \ldots, x(n)) &\mapsto x(1) \end{aligned}$$

ist stetig.

Allgemeiner: Jede Projektion ist $f((x(1), \ldots, x(n))) = x(i)$ ist stetig.

Beweis: Nach dem Übungsblatt konvergiert eine Folge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn die Projektionsfolgen auf die n-Standardachsen konvergieren: $v_i \in \mathbb{R}^n$ gegeben. $v_i \to \xi \Leftrightarrow \mathrm{pr}_\nu(\xi) \in \mathbb{R}$ konvergiert für alle $\nu = 1, \ldots, n$.

$$v_i \to \xi = \lim_{i \to \infty} v_i \Rightarrow \mathrm{pr}_\nu(\xi) = \lim_{i \to \infty} \mathrm{pr}_\nu(v_i)$$

Das heißt $\mathrm{pr}_n u$ ist stetig im Punkt ξ.

5. Beispiel: Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Ebenso die Funktion

$$\begin{aligned} \exp : \quad \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Beweis: $x_n \to \xi$. Zu zeigen: $\exp(x_n) \to \exp(\xi)$.

Es gilt $\exp(x_n) = \exp(\underbrace{x_n - \xi}_{=:z_n}) \cdot \exp(\xi) \to \exp(\xi) \Leftrightarrow \exp(z_n) \to 1$, wenn $z_n \to 0$.

Da exp im Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ kontraktiv ist, folgt diese Behauptung aus Lemma: Jede kontraktive Abbildung ist stetig.

1. Satz: Die Komposition stetiger Abbildungen ist wieder stetig.

Beweis: Gegeben seien $f : \ (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, $g : \ (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$. Dann ist $h = g \circ f$ stetig, denn für $x_n \to \xi$ gilt: $y_n = f(x_n) \to \eta = f(\xi)$, da f stetig ist (i).
Für $y_n \to \eta$ in Y gilt: $g(y_n) \to g(\eta)$, da g stetig ist (ii).
(i) und (ii) zusammen ergeben

$$h(x_n) = g\left(f(x_n)\right) = g(y_n) \xrightarrow{\text{(ii)}} g(\eta) \overset{\text{(i)}}{=} g\left(f(\xi)\right) = h(\xi)$$

2. Satz: Seien f, g zwei stetige, reellwertige Funktionen $f, g : \ (X, d_X) \to \mathbb{R}$.
Ist $\xi \in X$, dann ist

- $f \pm g$, $f \cdot g$ stetig (in ξ)
- $\frac{f}{g}$ stetig (in ξ), falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$.

Beweis: OBdA betrachten wir $(f+g)(x) \overset{\text{Def}}{=} f(x) + g(x)$.
$x_n \to \xi$. Zu zeigen ist $(f+g)(x_n) \to (f+g)(\xi)$.
Die linke Seite ist $f(x_n) + g(x_n)$.
Die rechte Seite ist $f(\xi) + g(\xi)$.
Die Aussage (Stetigkeit) folgt wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(x_n) + g(x_n)\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(\xi) + g(\xi)$$

Folgerung: Jedes Polynom $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion.
Beweis: Satz 2 + 2. und 3. Beispiel

Analog $\frac{P(x)}{Q(x)}$. P, Q Polynome, Q habe keine Nullstellen im Intervall $[a, b]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} : \quad [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

eine stetige Funktion.

4.2 Nullstellensatz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) <$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt). Dann existiert eine Nullstelle $\xi \in [a,b]$ d.h. $f(\xi) = 0$.

Beweis: Sei $X_f = \{x \in [a,b] | f(x) < 0\}$. X_f ist nach oben durch $b \notin X_f$ beschränkt. Somit existiert das Supremum $\xi = \sup(X_f)$. Wegen $f(b) > 0$, also $b \notin X_f$ folgt $\xi < b$. Nach "Konstruktion von sup" (s. 2.23) existieren Folgen $a_n \nearrow \xi$, $a_n \in X_f$, $b_n \searrow \xi$, $b_n \notin X_f$ $(a_n < b_n)$. Aus der Stetigkeit von f folgt:

$$f(\xi) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{\leq 0}$$

Also ist $f(\xi) \leq 0$ (s. 2.15). Außerdem folgt:

$$f(\xi) = f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(b_n)}_{\geq 0}$$

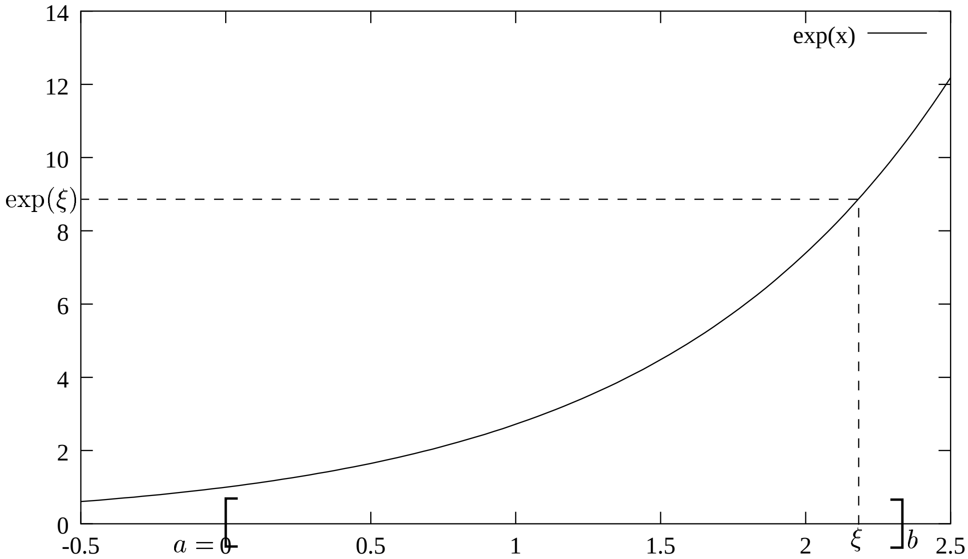
Also ist $f(\xi) \geq 0$. Insgesamt folgt: $f(\xi) = 0$, ξ ist eine Nullstelle.
Folgerung: Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine *injektive*, stetige Funktion mit Bild $\mathbb{R}_{>0}$.

$$(\mathbb{R}, +) \xrightarrow[\text{bijektiv}]{\sim} (\mathbb{R}^*, \cdot)_{>0}$$

Beweis:

- $\exp(x) < \exp(y)$, falls $x < y \Rightarrow \exp$ ist injektiv.
- exp ist stetig nach 4.1 Beispiel 5.
- $\exp > 0$
- $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ $(*)$
- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) \approx 2.71 > 2$

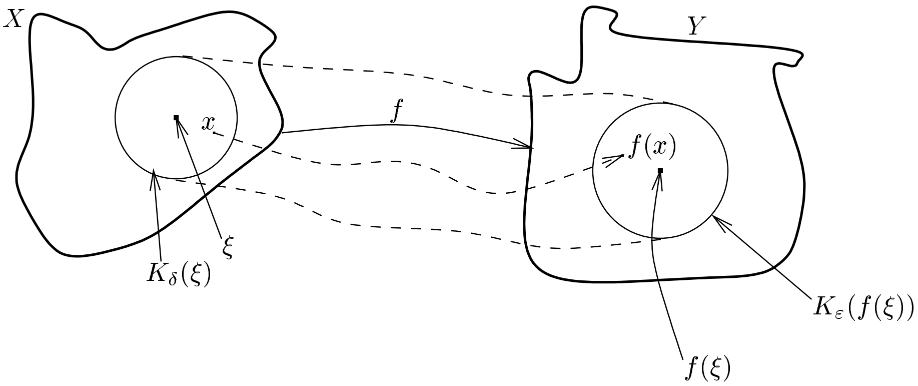
somit existiert für jedes $y \geq 1$ in $\mathbb{R}$ ein $b \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq y \leq 2^b \leq \exp(b) = \exp(1)^b$
Zwischenwertsatz: $[a,b] = [0,b]$
Jeder Wert zwischen $\exp(0) = 1$ und $\exp(b)$ wird angenommen. Somit existiert für $y \geq 1$ ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\exp(\xi) = y$.



Somit ist jedes $y \geq 1$ im Bild. Wegen $(*)$ ist dann auch jedes $0 \leq \tilde{y} \leq 1$ im Bild.

4.3 Das ε-δ-Kriterium

Eine Funktion $f: \ (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ ist stetig im Punkt $\xi \in X$ genau dann, wenn gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so daß $d_X(x, \xi) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon \ (*)$.



$f: \ K_\delta(\xi) \to K_\varepsilon(f(\xi)) = \{y \in Y | d_Y(y, f(\xi)) < \varepsilon\}$

Beweis: Es gelte $(*)$: Wähle Folge $x_n \to \xi$ (beliebig). Dann gilt

$$\forall \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N \ d(x_n, \xi) < \delta$$

Wähle ε wie in $(*)$. $d_Y(f(x_n), f(\xi)) < \varepsilon$ falls $n \geq N$ (und somit $x_n \in K_\delta(\xi)$). D.h. $f(x_n) \to f(\xi)$.
Aus $(*)$ folgt daher f ist stetig in ξ.

Sei umgekehrt f stetig in ξ. Wäre $(*)$ falsch, dann gilt: $\exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0$ (z.B. $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$) mit $\exists x_\delta = x_n$ mit $d_X(x_n, \xi) < \delta$ und $d_Y(f(x_n), f(\xi)) \geq \varepsilon$. Es folgt: $x_n \to \varepsilon$ (da $d_X(x_n, \xi) < \frac{1}{n}$. Da f stetig ist, folgt daher $f(x_n) \to f(\xi)$. Dies liefert einen Widerspruch zu $d_Y(f(x_n), f(\xi)) \geq \varepsilon > 0$, denn $d_Y(-, f(\xi))$ ist stetig im ersten Argument (s. 4.1 Beispiel 1). Somit

$$d_Y(f(x_n), f(\xi)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d_Y\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n), f(\xi)\right) = d_Y(f(\xi), f(\xi)) = 0$$

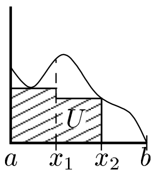
Widerspruch, da $\forall n\ d_Y(f(x_n), f(\xi)) \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_Y(f(x_n), f(\xi)) \geq \varepsilon > 0$.

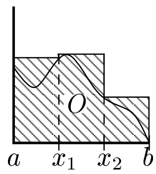
5 Integral- & Differentialrechnung

5.1 Definition – Integral

f sei eine beschränkte Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}$.

- Eine *Zerlegung* $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$ ist $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b$. Die Teilintervalle heißen $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ mit $|I_i| = x_i - x_{i-1}$.
  Definiere:
  - Obersumme $O(Z, f) = \sum_{i=1}^{r} |I_i| \sup_{x\in I_i} f(x)$
  - Untersumme $U(Z, f) = \sum_{i=1}^{r} |I_i| \inf_{x\in I_i} f(x)$

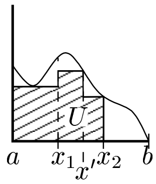
  

  Offensichtlich gilt:
  $$U(Z, f) \leq O(Z, f) \tag{1}$$

- Z' heißt *Verfeinerung* von $Z = \{x_0, \ldots, x_r\}$, falls $Z' = \{x'_0, \ldots, x'_{r'}\} \supset Z = \{x_0, \ldots, x_r\}$

  Für je zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 gibt es eine gemeinsame Verfeinerung, z.B. $Z' = Z_1 \cup Z_2$.

  Offensichtlich gilt:
  $$U(Z, f) \leq U(Z', f) \text{ falls } Z' \supset Z \tag{2}$$
  $$O(Z, f) \geq O(Z', f) \text{ falls } Z' \supset Z \tag{3}$$



Für alle Z_1, Z_2 gilt

$$U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f) \tag{4}$$

Beweis: (1), (2), (3) $\Rightarrow$ (4)

Wähle gemeinsame Verfeinerung $Z' = Z_1 \cup Z_2$

$$U(Z_1, f) \overset{(2)}{\leq} U(Z', f) \overset{(1)}{\leq} O(Z', f) \overset{(3)}{\leq} O(Z_2, f)$$

$U(Z_1, f) \leq$const für alle Z_1 (z.B. const$=O(Z_2, f)$ für irgendein Z_2).

Definition: Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt $\sup_{Z_1} U(Z_1, f) \leq \inf_{Z_2} O(Z_2, f)$. Die Funktion heißt *integrierbar* (auf dem Intervall $[a, b]$), falls Gleichheit gilt. Der gemeinsame Wert heißt dann das *Integral* von f auf $[a, b]$:

$$\boxed{\sup_{Z_1} U(Z_1, f) = \inf_{Z_2} O(Z_2, f) =: \int\limits_a^b f(x)dx}$$

Zusatz: Offensichtlich folgt aus (2) und (3) bei Wahl von $Z = [a, b]$:

$$(b-a) \cdot \inf_{x \in [a,b]} f(x) \overset{(2)}{\leq} \int_a^b f(x)dx \overset{(3)}{\leq} (b-a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

Aus dem Zusatz folgt:

1) Ist $f \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq |b-a| \cdot \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

5.2 Satz – Stetigkeit, Integrierbarkeit

Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist integrierbar (und automatisch beschränkt).

Beweis: Zu zeigen ist das Verschwinden von $0 \leq \inf_{Z_2} O(Z_2, f) - \sup_{Z_1} U(Z_1, f)$. Die rechte Seite kann abgeschätzt werden durch $\inf_{Z_2} O(Z_2, f) - \sup_{Z_1} U(Z_1, f) \leq O(Z, f) - U(Z, f)$. Andererseits gilt

$$O(Z, f) - U(Z, f) \leq (b-a) \cdot \max_{i=1,\ldots,r} \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right)$$

Sei nun $|I_i| < \delta$ für alle i. Falls gilt: $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ für alle $|x - \xi| < \delta$, z.B. $x, \xi \in I_i$, dann folgt $\left|\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{\xi \in I_i} f(\xi)\right| \leq \varepsilon$.
Resume: $\left|\inf_{Z_2} O(Z_2, f) - \sup_{Z_1} U(Z_1, f)\right| \leq (b - a) \cdot \varepsilon$. Da ε beliebig gewählt war, folgt: f ist integrierbar, d.h. die linke Seite $= 0$.

5.3 Definition – Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls gilt

$$\forall \varepsilon \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall \xi, x \ |x - \xi| < \delta \ \ (|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon)$$

5.4 Satz – Gleichmäßige Stetigkeit in $\mathbb{R}$

Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist bereits gleichmäßig stetig. (Das Analogon für beliebige metrische Räume ist falsch!)
Zur Erinnerung: Jede Folge $x_n \in [a, b]$ besitzt eine konvergente Teilfolge (s. 2.21).

Beweis: Fixiere $\varepsilon > 0$. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, folgt

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta \exists \xi, x \ |x - \xi| < \delta : \ |f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon$$

Für alle δ, z.B. $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann erhält man Folgen x_n, ξ_n mit $|x_n - \xi_n| < \delta = \frac{1}{n}$, $|f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon > 0$.
Wähle eine (gemeinsame) Teilfolge, so daß $\xi_n \to \xi$ und $x_n \to x$. Dann folgt ein Widerspruch, denn $|x - \xi| = \lim_{n\to\infty} |x_n - \xi_n| = 0 \Rightarrow x = \xi$. Andererseits gilt:

$$0 < \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(\xi_n)| = |f(x) - f(\xi)| \overset{x=\xi}{=} |0| = 0$$

5.5 Definition – Folgenkompakte Räume

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge $x_n \in X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Beispiel: $X = [a, b]$ oder allgemein jeder Quader $X = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ im $\mathbb{R}^n$.

5.5.1 Satz – Funktionen auf folgenkompakten Räumen

Für jede stetige Funktion $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ auf einem folgenkompakten Raum (X, d) gilt:

1. f ist gleichmäßig stetig
2. f ist beschränkt
3. f nimmt sein Maximum an

Beweis:

1. siehe 5.4

2. Wäre 2. falsch existiert eine Folge $x_n \in X$ mit $f(x_n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle eine konvergente Teilfolge $\widetilde{x_n} \to x$. Da f stetig ist gilt $\lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x_n}) = f\left(\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n}\right) = f(x)$. Aber $f(\widetilde{x_n})$ wächst über alle Schranken! Widerspruch!

3. Sei $y := \sup\left(\underbrace{\{f(x)|x \in X\}}_{=:f(X)}\right)$. Es existiert eine Folge $x_n \in X$ mit $f(x_n) \nearrow y$. Da f stetig ist finde ich – nach Übergang zu Teilfolge $\widetilde{x_n} \to x - y = \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x_n}) = f\left(\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n}\right) = f(x) \in f(X)$.

5.6 ε-Kriterium

Eine Funktion f beschränkt auf $[a,b]$ ist genau dann integrierbar, wenn gilt $\forall\varepsilon\exists Z:\ 0 \leq O(Z,f) - U(Z,f) < \varepsilon$.

5.7 Elementare Eigenschaften des Integrals

1. Sei $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sei $\xi \in [a,b]$ beliebig. Dann sind äquivalent:

   (i) f ist integrierbar auf $[a,\xi]$ und auf $[\xi,b]$.

   (ii) f ist integrierbar auf $[a,b]$.

   Weiterhin gilt die *Flächenadditionsformel*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\xi f(x)fx + \int_\xi^b f(x)dx \tag{5}$$

   Zusatz: Setzt man $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ für $a > b$, dann gilt (5) für alle a, b, ξ.

2. f ist $\mathbb{R}$-linear: Seien $f(x)$, $g(x)$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b]$. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha \cdot f(X) + \beta \cdot g(x)$ beschränkt und integrierbar. Es gilt:

$$\int_a^b \big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \tag{6}$$

Beweis von 1.:
(i)⇒(ii): ε-Kriterium: $\forall\varepsilon > 0\exists Z$ mit $O(Z,f) - U(Z,f) < \frac{\varepsilon}{2}$ (Z Zerlegung von $[a,b]$, ObdA $\xi \in Z$, da

$$O(Z_\xi, f) - U(Z_\xi, f) \overset{(2),(3)}{\leq} O(Z,f) - U(Z,f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Hierbei sei $Z_\xi = \{\xi\} \cup Z$).
Dann gilt:

$$\begin{aligned} O(Z_\xi, f) - U(Z_\xi, f) &= O^{[a,\xi]}(Z_\xi \cap [a,\xi], f) - U^{[a,\xi]}(Z_\xi \cap [a,\xi], f) \\ &\quad + O^{[\xi,b]}(Z_\xi \cap [\xi,b], f) - U^{[\xi,b]}(Z_\xi \cap [\xi,b], f) \end{aligned}$$

Es folgt: $O^{[a,\xi]}(Z_\xi \cap [a,\xi], f) - U^{[a,\xi]}(Z_\xi \cap [a,\xi], f) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $O^{[\xi,b]}(Z_\xi \cap [\xi,b], f) - U^{[\xi,b]}(Z_\xi \cap [\xi,b], f) < \frac{\varepsilon}{2} \overset{\frac{\varepsilon}{2}-\text{Kriterium}}{\Rightarrow} f$ ist integrierbar auf $[a,\xi]$ bzw. $[\xi,b]$.

(ii)⇒(i): Nach dem $\frac{\varepsilon}{2}$-Kriterium gibt es für $\varepsilon > 0$ Zerlegungen Z_1 von $[a,\xi]$ und Z_2 von $[\xi,b]$ mit

$$\begin{array}{rrcl} & O(Z_1,f) - U(Z_1,f) & < & \frac{\varepsilon}{2} \\ & O(Z_2,f) - U(Z_2,f) & < & \frac{\varepsilon}{2} \\ \hline \overset{\text{Addition}}{\Rightarrow} & O(Z,f) - U(Z,f) & < & \varepsilon \end{array}$$

Beweis von 2.:
Sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt:

$$\alpha U(Z,f) + \beta U(Z,g) \overset{(9)}{\leq} U(Z, \alpha\cdot f + \beta\cdot g) \leq O(Z, \alpha\cdot f + \beta\cdot g) \overset{(8)}{\leq} \alpha\cdot O(Z,f) + \beta\cdot O(Z,g) \quad (7)$$

Wähle eine Folge von Zerlegungen Z mit $U(Z,f) \nearrow \int_a^b f(t)dt$ und $O(Z,f) \searrow \int_a^b f(t)dt$ sowie eine Folge von Zerlegungen $\tilde{Z}$ mit $O(\tilde{Z},g) \nearrow \int_a^b g(t)dt$ und $O(\tilde{Z},g) \searrow \int_a^b g(t)dt$. Man überlegt sich, daß obdA $Z = \tilde{Z}$ gewählt werden kann (gemeinsame Verfeinerung). "Zangenlemma" ⇒ Die Ungleichungen (7) geben im Limes: $\alpha\cdot\int_a^b f(t)dt + \beta\cdot\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)dt \leq \alpha\cdot\int_a^b f(t)dt + \beta\cdot\int_a^b g(t)dt \Rightarrow \alpha\cdot\int_a^b f(t)dt + \beta\cdot\int_a^b g(t)dt = \int_a^b \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)dt$

5.7.1 Hilfssatz – Addition von Supremas

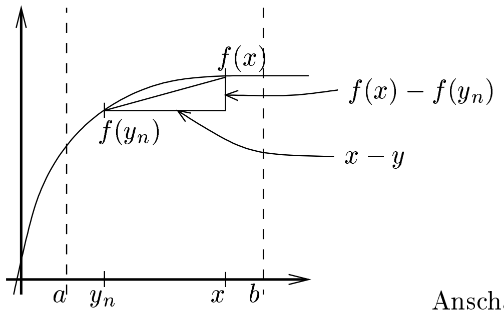
$$\sup_{x\in I_\nu}(f+g) \leq \sup_{x\in I_\nu} f(x) + \sup_{x\in I_\nu} g(x) \tag{8}$$

$$\inf_{x\in I_\nu}(f+g) \geq \inf_{x\in I_\nu} f(x) + \inf_{x\in I_\nu} g(x) \tag{9}$$

5.8 Definition – Differenzierbarkeit

Eine Funktion $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* im Punkt $\xi \in [a,b]$ falls für jede Folge $x_n \to \xi$ die Folge $\frac{F(\xi)-F(x_n)}{\xi - x_n}$ konvergiert (hierbei sei $x_n \neq \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt) und falls der Grenzwert nicht von der Wahl der Folge $x_n \to \xi$ abhängt. Den Grenzwert nennt man die *Ableitung* von F im Punkt ξ:

$$F'(\xi) := \lim_{n\to\infty} \frac{F(\xi) - F(x_n)}{\xi - x_n} \tag{10}$$



Anschaulich: $f'(x)$ ist die Steigung der Tangente an f im Punkt $(x, f(x))$.
F heißt differenzierbar auf $[a, b]$ falls F differenzierbar ist für alle $\xi \in [a, b]$.

5.9 Satz – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei f stetig auf $[a, b]$. Dann ist die Funktion

$$\begin{array}{rccc} F: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

eine differenzierbare Funktion auf $[a, b]$. Es gilt $\boxed{F'(x) = f(x)}$.

Beweis: Wähle eine Folge $x_n \to \xi$ (mit $x_n \neq \xi \forall n \in \mathbb{N}$).

$$\begin{aligned} \frac{F(\xi) - F(x_n)}{\xi - x_n} &= \frac{\int_a^\xi f(t)dt - \int_a^{x_n} f(t)dt}{\xi - x_n} \\ &\overset{(5)}{=} \frac{\int_{x_n}^\xi f(t)dt}{\xi - x_n} \end{aligned}$$

Zu zeigen ist: $(**)$: $\frac{\int_{x_n}^\xi f(t)dt}{\xi - x_n} - f(\xi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
kleine Umformung: $\displaystyle\int_{x_n}^\xi f(\xi)dt = f(\xi) \cdot \int_{x_n}^\xi 1dt = f(\xi) \cdot (\xi - x_n)$

$$(**): \qquad \frac{\int_{x_n}^\xi f(t)dt - \int_{x_n}^\xi f(\xi)dt}{\xi - x_n} \overset{(6)}{=} \frac{\int_{x_n}^\xi \left[f(t) - f(\xi)\right]dt}{\xi - x_n}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int_{x_n}^\xi \left[f(t) - f(\xi)\right]dt}{\xi - x - n} \right| &\leq \frac{\left|\xi - x_n\right| \cdot \sup_{y \in [x_n, \xi]} \left|f(y) - f(\xi)\right|}{|\xi - x_n|} \\ &= \sup_{y \in [x_n, \xi]} \left|f(y) - f(\xi)\right| \end{aligned}$$

Da f gleichmäßig stetig ist, gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \ \forall y, \xi \ |y - \xi| < \delta : \quad \left|f(y) - f(\xi)\right| < \varepsilon$

5.10 Definition – Ordnung

Sei f eine Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann gilt: $f(x) = o((x-\xi)^n)$ $(n \in \mathbb{N})$ genau dann, wenn $f(x) = (x-\xi)^n \cdot h(x)$ mit $h(x) = 0$ und h stetig im Punkt $x = \xi$.
Beispiel: $f(x) = (x-\xi)^2 = o(x-\xi)$, aber nicht $o((x-\xi)^2)$.

Man zeigt leicht:

- Sind f, g von der Ordnung $o((x-\xi)^n)$, dann ist auch $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ von der Ordnung $o((x-\xi)^n)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
- Aus $f = o((x-\xi)^n)$ und $g = o((x-\xi)^m)$ folgt $f \cdot g = o((x\xi)^{n+m})$.

Bemerkung: $f \sim g \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f - g = o((x-\xi)^n)$ definiert eine Äquivalenzrelation (s. 1.4.3).

5.11 Definition – Lineare Approximation

Sei f eine Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$ und $a < b$, $\xi \in [a,b]$. Dann gilt: f heißt *linear approximierbar* im Punkt ξ, falls $a, b \in \mathbb{R}$ existieren, so daß $f \sim a + b(x-\xi)$.
Genauer: $f - a - b(x-\xi) = o(x-\xi)$.
Bemerkung: Ist f linear approximierbar im Punkt ξ, dann sind a, b (d.h. die Geradengleichung) eindeutig durch f und ξ bestimmt.

5.12 Lemma

Sei f eine Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$ und $a < b$, $\xi \in [a,b]$. Dann gilt: Äquivalent sind:

(i) $f(x)$ ist differenzierbar im Punkt ξ mit Ableitung $f'(\xi)$.

(ii) $\tilde{f} := \begin{cases} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} & x \neq \xi \\ f'(\xi) & x = \xi \end{cases}$ ist stetig im Punkt ξ.

(iii) $f(x)$ ist linear approximierbar durch $a + b(x-\xi) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$, d.h. $f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x-\xi) = o(x-\xi)$.

Beweis:

(i)⇒(ii) benutzt Hilfssatz 5.12.1:
(i): $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}(x_n) = f'(\xi)$ für alle $x_n \to \xi$ für die $x_n \neq \xi$.
(ii): $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}(x_n) = f'(\xi)$ für alle $x_n \to \xi$.
Benutze Hilfssatz für $a = \tilde{f}(\xi) = f'(\xi)$.

(ii)⇒(iii) Es gilt offensichtlich: $f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \underbrace{\overbrace{\tilde{f}(x) - f'(\xi)}^{h(x)} \cdot (x-\xi)}_{o(x-\xi)}$

$h(x)$ ist stetig im Punkt ξ, da $\tilde{f}(x)$ stetig ist im Punkt ξ nach Annahme (ii) $f(\xi) = \tilde{f}(\xi) - f'(\xi) = 0$.

(iii)⇒(i) trivial

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} = f'(\xi) + h(x_n) \underset{x_n \to \xi}{\longrightarrow} f'(\xi) + h(\xi) = f'(\xi)$$

5.12.1 Hilfssatz

Sei x_n eine Folge. Sei $y_n \to a$ eine konvergente Teilfolge von x_n. Die weggelassenen Folgenglieder von x_n seien gleich a. Dann gilt $x_n \to a$.

5.13 Lemma - Differenzierbarkeit, Stetigkeit

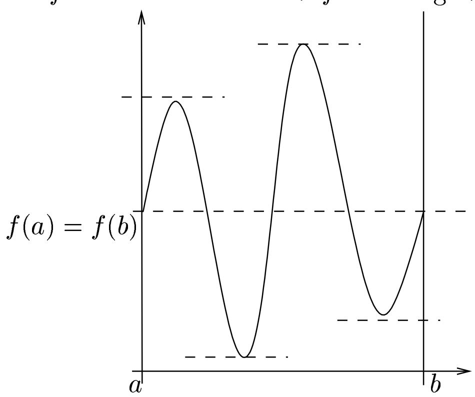
Sei f eine Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}$ und $a < b$, $\xi \in [a, b]$. Dann gilt: Ist f differenzierbar, dann ist f auch stetig.

Beweis: $\xi \in [a, b]$. Wähle $x_n \to \xi$, $x_n \in [a, b]$.
$f(x_n) = f(\xi) + f'(\xi)(x_n - \xi) + h(x_n)(x_n - \xi) \underset{x_n \to \xi}{\longrightarrow} f(\xi)$
Daher ist f stetig in ξ.

5.14 Satz – Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei f differenzierbar auf $[a, b]$. Sei $a < b$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so daß gilt $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Beweis: (im Spezialfall $f(a) = f(b)$)
Zu zeigen: $\exists \xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.
f ist differenzierbar ⇒ f ist stetig ⇒ f nimmt Extremwerte an (s. 5.5.1)



Wegen $f(a) = f(b)$ ist entweder $f = const$
oder: das Minimum wird in (a, b) angenommen
oder: das Maximum wird in (s, b) angenommen
ObdA (f ist nicht konstant) existiert ein Extremwert $(\xi, f(\xi))$ mit $\xi \in (a, b)$. ObdA sei ξ ein Maximum.

$$f'(\xi) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n}$$

Wähle $x_n \to \xi$ mit $x_n < \xi$. Dann gilt

$$f'(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n} \in \frac{[0,\infty)}{(0,\infty)} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Somit ist Limes $f'(\xi) \geq 0$.
Wähle $x_n \to \xi$ mit $x_n > \xi$. Dann gilt

$$f'(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n} \in \frac{[0,\infty)}{(-\infty,0)} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 0}$$

Im Limes gilt $f'(\xi) \leq 0$.
Also folgt $f'(\xi) = 0$.

Beweis: (allgemein)

Betrachte: $G(x) := f(x) - \underbrace{f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)}_{\text{linear in x}}$

- G ist differenzierbar
- $G(a) = 0$, $G(b) = 0$. Also existiert $\xi \in (a,b)$ mit $G'(\xi) = 0$.
  Beachte $0 = G'(\xi) = f'(\xi) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1$, da $(x-a)' = x' = 1$.

5.14.1 Korrolar

$f'(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \Rightarrow f(x) = f(a) \forall x \in [a,b]$.

Beweis des Korrolar: Für alle $x \in (a,b]$ gilt $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_x) = 0$, also $f(x) = f(a)$.

5.15 Bemerkung – Ableitung von zusammengesetzten Funktionen

Seien f, g differenzierbare Funktionen auf $[a,b]$. Dann sind $\alpha \cdot f$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $f+g$, $f \cdot g$ und f/g (falls $g(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in [a,b]$) differenzierbar auf $[a,b]$ und es gilt:

$$(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f' \tag{11}$$
$$(f+g)' = f' + g' \tag{12}$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \tag{13}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \tag{14}$$

Beweis: Sei $\xi \in [a,b]$. Beachte: $x \to \xi$ bedeutet $x_n \to \xi$ beliebig!

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) + g(x) - (f(\xi) + g(\xi))}{x - \xi} &= \lim_{x\to\xi} \left(\frac{f(x) - f(\xi)}{x-\xi} + \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right) \\ &= \underbrace{\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{=f'(\xi)} + \underbrace{\lim_{x\to\xi} \frac{g(x) - g(\xi)}{x-\xi}}_{=g'(\xi)} \end{aligned}$$

Es folgt: Der Limes (links) existiert und hängt nicht von der Folge $x_n \to \xi$ ab. Also ist $f+g$ differenzierbar im Punkt ξ. Es gilt: $(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$.
Analog:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(\xi)\cdot g(\xi)}{x-\xi} &= \lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)g(x) - f(\xi)g(x) + f(\xi)g(x) - f(\xi)g(\xi)}{x-\xi}\right) \\
&= \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\cdot\lim_{x\to\xi} g(x) + f(\xi)\cdot\lim_{x\to\xi}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \\
&= f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)
\end{aligned}$$

denn g ist stetig in ξ (Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit).
Schließlich gilt $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$, denn

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\xi}\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(\xi)}{x-\xi} &= \lim_{x\to\xi}\frac{g(\xi)-g(x)}{(x-\xi)g(x)g(\xi)} \\
&= \lim_{x\to\xi}\frac{g(\xi)-g(x)}{x-\xi}\cdot\lim_{x\to\xi}\frac{1}{g(x)g(\xi)} \\
&= -g'(\xi)\cdot\frac{1}{g^2(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{g^2(\xi)}
\end{aligned}$$

5.16 Lemma – Ableitung von x^n

$(x^n)' = nx^{n-1}$ für alle $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$.

Beweis: (vollständige Induktion)
$n=1$: $x'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{x-\xi} = 1$
$n \rightsquigarrow n+1$: $(x^{n+1})' = (x^n\cdot x)' = (x^n)'\cdot x + x^n\cdot x' = nx^{n-1}\cdot x + x^n\cdot 1 = (n+1)x^n$

Folgerung: $f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Dann gilt $f'(x) = \sum_{n=0}^{N} n a_n x^{n-1}$.

5.17 Definition – N-malige Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt N-mal differenzierbar, falls gilt: f ist differenzierbar, f' ist differenzierbar, $\ldots$, $f^{(N-1)}$ ist differenzierbar ($f^{(N)}$ existiert).
Beispiel:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \\
f^{(N)}(x) &= a_N\cdot N! \Leftrightarrow a_N = \frac{f^{(N)}(0)}{N!}
\end{aligned}$$

5.18 Lemma – Differenzierbarkeit von exp

exp ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ und es gilt für $f(x) = exp(x)$ die Gleichung $f'(x) = f(x)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\xi} \frac{\exp(x) - \exp(\xi)}{x - \xi} &= \lim_{x\to\xi} \frac{\exp(x - \xi + \xi) - \exp(\xi)}{x - \xi} \\
&= \lim_{x\to\xi} \frac{\exp(x - \xi) \cdot \exp(\xi) - \exp(\xi)}{x - \xi} \\
&= \exp(\xi) \cdot \lim_{x\to\xi} \frac{\exp(x - \xi) - 1}{x - \xi} \\
&= \exp(\xi) \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}}_{=1} \\
&= \exp(\xi)
\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| \left(\frac{\exp(x) - 1}{x}\right) - 1 \right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x^n}{(n+1)!}\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} \\
&= |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+2)!} \\
&\leq |x| \cdot \exp(|x|) \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

5.19 Satz – Ableitung, Monotonie

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Gilt $f'(\xi) > 0$ für alle $\xi \in (a, b)$, dann ist f streng monoton wachsend auf $[a, b]$.

Beweis: Mittelwertsatz angewendet auf $[x, y]$ für $a \leq x < y \leq b$ liefert $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi)$, $\xi \in (x, y)$. Da nach Annahme $f'(\xi) > 0$ und $y - x > 0$ folgt $f(y) - f(x) > 0$.
Insbesondere ist f injektiv.
$\mathrm{Bild}(f) = [f(a), f(b)]$, denn $\mathrm{Bild}(f) \subseteq [f(a), f(b)]$. Da f stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz die Gleichheit.
Also ist f eine Bijektion $f : [a, b] \xrightarrow{\sim} [f(a), f(b)]$. Also existiert $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$

5.20 Ableitung der Umkehrfunktion

Behauptung: f^{-1} ist differenzierbar.

Beweis: Sei $[a,b] \ni \xi \leftrightarrow \eta \in [f(a), f(b)]$.
Sei $y_n \to \eta$ mit $y_n \neq \eta$ aber in $[f(a), f(b)]$. Untersuche

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y-\eta} &= \lim_{y\to\eta} \frac{1}{\frac{y-\eta}{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}} \\
&= \lim_{y\to\eta} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(\eta))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}} \\
&= \frac{1}{\lim_{f^{-1}(y)\to f^{-1}(\eta)} \frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(\eta))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}} \\
&= \frac{1}{f'\big(f^{-1}(\eta)\big)}
\end{aligned}$$

Beachte:

- $y \to \eta \Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(\eta)$
- $f'\big(f^{-1}(\eta)\big) = f'(\xi) \neq 0$

Satz: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit positiver Ableitung: $f'(\xi) > 0 \forall \xi \in [a,b]$. Dann ist f monoton und besitzt eine monotone Umkehrfunktion $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist differenzierbar auf $[f(a), f(b)]$ mit Ableitung

$$\left(f^{-1}\right)'(\eta) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(\eta)\big)} \tag{15}$$

Beispiel: $f = \exp$, $f' = \exp > 0$. Es folgt $f^{-1} = \log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $\log(x)' = \frac{1}{x}$, da

$$\frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}$$

Folgerungen: Sei $x > 0$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann setze $x^\alpha := \exp(\alpha \cdot \log(x))$.
Sei $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $y = x^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \log(x)\right)$, $y^n = x = \exp(\frac{1}{n} \cdot \log(x))^n =$

$$\exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} \cdot \log(x) + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \log(x)}_{n-\text{mal}}\right) = \exp(\log(x)) = x$$

Ähnlich zeigt man: $x^\alpha = x \cdot \cdots \cdot x$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}$.
Beachte: Aus dem nächsten Satz folgt, daß x^α eine differenzierbare Funktion von $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist und eine differenzierbare Funktion von $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.21 Satz – Kettenregel

Sind X, Y, Z abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$. Sind $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ differenzierbar, dann auch die Komposition $g \circ f: X \to Z$. Es gilt (*Kettenregel*):

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \tag{16}$$

Beweis: Zur Erinnerung: Äquivalent sind:

1. f ist differenzierbar im Punkt ξ.
2. f ist linear approximierbar im Punkt ξ:

$$(**) \quad f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + h(x)(x-\xi)$$

(h stetig in ξ, $h(\xi) =$).

g differenzierbar in $\eta \Rightarrow \quad (*) : \quad g(y) = g(\eta) + g'(\eta)(y-\eta) + \tilde{h}(y)(y-\eta)$ ($\tilde{h}$ stetig, $\tilde{h}(\eta) = 0$).

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) = g(f(x)) &\overset{(*)}{=} g(f(\xi)) + g'(f(\xi))(f(x) - f(\xi)) + \tilde{h}(f(x))(f(x) - f(\xi)) \\
&\overset{(**)}{=} g(f(\xi)) + \Big[g'(f(\xi)) + \tilde{h}(f(x))\Big] \cdot \big(f'(\xi) \cdot (x-\xi) + h(x)(x-\xi)\big) \\
&= (g \circ f)(\xi) + \big(g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)\big)(x-\xi) \\
&\quad + \Big[(\tilde{h} \circ f)(x) - f'(\xi) + y'(f(\xi)) \cdot h(\xi) + \tilde{h}(f(x)) \cdot h(x)\Big] \cdot (x-\xi)
\end{aligned}$$

$[\%](\xi) = \tilde{h}(\eta) \cdot f'(\xi) + g'(f(\xi)) \cdot h(\xi) + \tilde{h}(\eta) \cdot h(\xi)$
[%] ist eine stetige Funktion, denn f, g sind stetig, da differenzierbar. Benutze, daß Kompositionen, Produkte und Summen stetiger Funktionen stetig sind.

5.22 Satz von Taylor

Sei f eine Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $[a,b]$ $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x,a) \tag{17}$$

5.22.1 Restglied nach Lagrange

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \tag{18}$$

mit $\xi = \xi(n,x) \in (a,b)$, $a \neq x$

Beweis: $F(t) := f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(t)}{\nu!}(x-t)^\nu - \frac{\kappa}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$

$F(a) = f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu - \frac{\kappa}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Wähle κ so, daß $F(a) = 0$.
$F(x) = f(x) - f(x) = 0$. $F(t)$ ist differenzierbar.

$$\begin{aligned}
\exists \xi \in (a,b): \; F'(\xi) = 0 \quad &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n + \frac{\kappa}{n!} \cdot (x-t)^n \\
&= 0 - \big(f(t) - f'(t)(x-t)\big) + \frac{\kappa}{n!} \cdot (x-t)^n \quad \text{fuer } n = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'(\xi) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\kappa}{n!} \cdot (x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \\
&\Leftrightarrow \quad \kappa = f^{(n+1)}(\xi)
\end{aligned}$$

Beispiel: : $a = 0$, $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2}) = e^{-\frac{1}{x^2}}$; $\kappa \in \mathbb{R}$ const.

$$\begin{aligned}
f'(x) \quad &= \quad 2\tfrac{1}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \xrightarrow{x \to 0} \quad 0 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) \quad &= \quad \tfrac{P(x)}{x^{n+2}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \xrightarrow{x \to 0} \quad 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall n: \; f^{(n)}(0) = 0$.

Beispiel: $f(x) = \exp(x+y)$; $f^{(i)}(x) = \exp(x+y) \; \forall i$
Aus dem Satz von Taylor folgt für $a = 0$:

$$\begin{aligned}
\exp(x+y) \quad &= \quad \exp(y) + \frac{\exp(y)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{\exp(y)}{n!}(x-a)^n \\
&\quad + \underbrace{\frac{\exp(x+\xi)}{(n+1)!}}_{R_n(x,a)}(x-a)^{n+1} \\
&= \quad \exp(y) \cdot \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)}_{\exp(x)}
\end{aligned}$$

Für $y = 0$ ergibt sich $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Beispiel: $f(t) = \log(1+tx)$, $\forall n \geq 1: \; f^{(n)}(t) = (-1)^{n+1}(n-1)!\frac{x^n}{(1+tx)^n}$
Satz von Taylor für $a = 0$, $b = 1$, $\xi \in (a,b) = (0,1)$:

$$\begin{aligned}
\log(1+x) \quad &= \quad \log(1+tx)\Big|_{t=1} \\
&= \quad \log(1) + \frac{x}{1}t - \frac{1!x^2}{2!}t^2 \pm \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}t^n + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1}\xi^{n+1}
\end{aligned}$$

Für $t = 1$:

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underbrace{(-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \xi^{n+1}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \\ &\quad +(-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{\xi}{1+x\xi}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Folgerung: $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ für alle $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$.
Für $x = 1$ folgt $\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

5.22.2 Variante

f sei n-mal differenzierbar.

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}\cdot(x-a)^{\nu} + o\big((x-a)^n\big)$$

Beweis:
1. Schritt: OBdA sei $f(a) = f^{(1)}(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$. Andernfalls ersetze f durch $\tilde{f} := f(x) - \sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^{\nu}$
$\tilde{f}(a) = 0 = \tilde{f}'(a) = f'(a) - \sum_{\nu=1}^{1} f'(a) = \cdots = \tilde{f}^{(\nu)}(a)$, falls $\nu \leq n$.
$\tilde{f}(x) = o\big((x-a)^n\big) \Rightarrow f - \sum \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^{\nu} = o\big((x-a)^n\big) \Rightarrow$ Behauptung.
2. Schritt: Sei oBdA $a = 0$ und $f^{(\nu)}(0) = 0$ für $\nu = 0, \ldots, n$. Zu zeigen ist $f(x) = x^n \cdot h(x)$ mit $h(x)$ stetig im Punkt $x = a = 0$ sowie $h(0) = 0$. Achtung: f ist n-mal differenzierbar auf $[a, b]$ mit $a < b$.
Ansatz: $h(x) = \frac{f(x)}{x^n}$. Für $x \neq 0$ ist h stetig. Warum gilt $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0) = 0$?
Beweis durch Induktion: Anfang $n = 1$: f differenzierbar in 0 $\Leftrightarrow$ f ist linear approximierbar in 0. $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o\big((x-a)^1\big) = o\big((x-a)^1\big)$.
3. Schritt: $h(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ ist nicht direkt diskutierbar. Deshalb betrachten wir eine Hilfsfunktion: Sei $x \neq 0$. $F(t) := \frac{f(xt)}{x^n}$; $F(t)$ ist n-mal differenzierbar als Funktion von t. $F^{(\nu)} = 0$ für $\nu = 0, \ldots, n$.
Satz von Taylor:

$$F(t) = \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{F^{(\nu)}(0)}{\nu!}t^{\nu}}_{=0} + \frac{F^{(n)}(\xi)}{n!}t^n, \quad 0 < \xi < t \leq 1$$

$$\begin{aligned}h(x) &\stackrel{!}{=} F(1) = \frac{F^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} \\ &= \frac{\left.\frac{f^{(n-1)}(x\cdot t)}{x}\right|_{t=\xi}}{(n-1)!} = \frac{x^{-1}f^{(n-1)}(x\cdot\xi)}{(n-1)!}\end{aligned}$$

Da $f^{(n-1)}$ mindestens 1-mal differenzierbar ist gilt:

$$\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} = \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} + o(x) = \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} + x \cdot \tilde{h}(x)$$

$\tilde{h}$ ist stetig, $\tilde{h}(0) = 0$.
Einsetzen ergibt $h(x) = x^{-1} \cdot (x \cdot \xi \cdot \tilde{h}(x \cdot \xi)) = \xi \cdot \tilde{h}(x \cdot \xi)$. $\xi = \xi(f, x, n)$, aber $0 < \xi < 1$.
4. Schritt:

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \xi(x) \cdot \tilde{h}(x \cdot \xi(x)) \longrightarrow 0$$

Beispiel: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3 + n^3} - \sqrt[3]{n^3 - n^2}$

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x) \\
&= 1 + \frac{\alpha \cdot 1^{\alpha-1}}{1!} \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot 1^{\alpha-2}}{2!} \cdot x^2 + o(x^2) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu + o(x^n)
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
n \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} \right) &= n \left(1 + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{3n} \pm o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= n \cdot \left(\frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= \frac{2}{3} + n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{2}{3} + n \cdot \frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\longrightarrow \frac{2}{3} + \lim_{n\to\infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

5.23 Regel von de l'Hospital

Sei $n \geq 1$. Seien f, g n-mal differenzierbar auf $[a, b]$, $a < b$.
Annahme:
$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$
$g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n-1)}(a) = 0$, $g^{(n)}(a) \neq 0$.
Dann existiert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} \tag{19}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + h(x)(x-a)^n}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \tilde{h}(x)(x-a)^n} \\
&= \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + h(x)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \tilde{h}(x)} \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}
\end{aligned}$$

Beispiel: $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$, $f(x) = \log(1+x)$, $g(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$.
$\mathbf{n = 1}$:
$f(0) = \log(1) = 0$, $f'(0) = \big(\log(1+x)\big)'\Big|_{x=0} = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=0} = 1$
$g(0) = 0$, $g'(0) = 1$

$$(*):\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \stackrel{(19)}{=} \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\log\left(1+\frac{y}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} n\cdot\log\left(1+\frac{y}{n}\right)\right); \qquad x := \frac{y}{n} \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}\cdot\log\left(1+x\right)\right) \\
&\stackrel{(*)}{=} \exp(y)
\end{aligned}$$

5.24 Satz – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

(s. Auch 5.9).
Sei $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f integrierbar.

$$F(t) = \int_a^t f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$, d.h. F ist differenzierbar auf $[a,b]$ mit $F'(t) = f(t)$.
Stammfunktionen $\tilde{F}(t)$ von $f(t)$ sind eindeutig bis auf eine Konstante: $\tilde{F}(t) = F(t)+C$.
Insbesondere gilt für jede Stammfunktion $\tilde{F}(t)$ von f, daß gilt:

$$\int_a^x f(t)dt = \tilde{F}(t)\Big|_a^x := \tilde{F}(x) - \tilde{F}(a) \tag{20}$$

Beweis: Linkte Seite ist $F(x) = \tilde{F}(x) - C$. Vergleich im Punkt $x = a$ liefert $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. Somit folgt $F(a) = 0 = \tilde{F}(a) - C$, also ist $C = \tilde{F}(a)$.

Folgerung:

$$\begin{aligned}
\int_x^y e^{-t}dt &= -e^{-t}\Big|_x^y = e^{-x} - e^{-y} \\
\lim_{y\to\infty}\int_x^y e^{-t}dt &= \int_x^\infty e^{-t}dt = e^{-x}
\end{aligned}$$

5.24.1 Produktregel

Seien f, g stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

$$\int_a^x f'(t)g(t)dt = -\int_a^x f(t)g'(t)dt + f(t)g(t)\Big|_a^x \tag{21}$$

Beweis: $f' \cdot g + f \cdot g' = (f \cdot g)' \Rightarrow \int_a^x f' \cdot g + \int_a^x f \cdot g' = f \cdot g\Big|_a^x$.

5.24.2 Kettenregel

Seien $f: \ [a, b] \to [c, d]$ und $g: \ [c, d] \to [e, h]$ stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int_a^b g\big(f(t)\big)f'(t)dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du \tag{22}$$

Beweis: G sei eine Stammfunktion von g. Dann gilt:

$$\int_a^b g\big(f(t)\big)f'(t)dt = G\big(f(t)\big)\Big|_a^b = G(u)\Big|_{f(a)}^{f(b)} = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du$$

5.25 Restglied der Taylor-Formel als Integral

$f: \ [a, b] \to \mathbb{R}$ sei $n+1$-mal stetig differenzierbar. Sei $a \leq x < b$. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + R_n(x, a)$$

mit

$$R_n(x, a) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \tag{23}$$

Beweis: vollständige Induktion:
Induktionsanfang $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

ist der Hauptsatz der Analysis (vgl. (20)).
Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\begin{aligned} R_n(x,a) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\Big|_a^x - \underbrace{\int_a^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt}_{=R_{n+1}(x,a)} \\ &= -(-1)\underbrace{\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)}_{n+1.\text{ Summand}} + R_{n+1}(x,a) \end{aligned}$$

5.25.1 Eine Anwendung

Es gilt: $(1+x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$ für alle $|x| < 1$ falls $\alpha > 0$.

Beweis: Es genügt zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0$.
Beachte: $[(1+x)^\alpha]^{(n+1)} = \binom{\alpha}{n+1}(n+1)!(1+x)^{\alpha-n-1}$.

$$\begin{aligned} R_n(x,0) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \binom{\alpha}{n+1} (n+1)!(1+t)^{\alpha-n-1} dt \\ &= (n+1)\binom{\alpha}{n+1} \underbrace{x^n \int_0^1 (1-t)^n (1+xt)^{\alpha-n-1} x\, dt}_{=:F(x)} \end{aligned}$$

somit $|R_n(x,0)| \leq \text{const}(\alpha)(n+1)\binom{\alpha}{n+1}$. Benutze: $1-t \leq 1+xt \Leftrightarrow t(x+1) \geq 0$, da $x \in (-1,1)$. Es folgt: $0 \leq \frac{(1+t)^n}{(1+xt)^n} \leq 1$, somit

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \left| x^n \cdot \int_0^1 (1+xt)^{\alpha-1} x\, dt \right| = \left| \frac{(1+xt)^\alpha}{\alpha}\Big|_0^1 \right| \\ &= \left| \frac{(1+x)^\alpha - \alpha}{\alpha} \right| \leq \frac{2^\alpha - 1}{\alpha} =: \text{const}(\alpha) \end{aligned}$$

Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = 0$ für $\alpha > 0$.

$$\left|(n+1)\frac{2\cdot\dots\cdot(\alpha-n-1+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(n+1)}\right| \leq \mathrm{const}'(\alpha)\cdot\prod_{\nu=\nu_0(\alpha)}^{n}\frac{\nu-\alpha}{\nu}$$

falls $\alpha+1 \geq \nu_0(\alpha) > \alpha$.

$$\left|\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\right| \leq \mathrm{const}'(\alpha)\prod_{\nu=\nu_0(\alpha)}^{n}\frac{\nu-\alpha}{\nu} = \mathrm{const}'(\alpha)\prod_{\nu=\nu_0(\alpha)}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{\nu}\right)$$

Es genügt: $\lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=\nu_0(\alpha)}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{\nu}\right) = 0$. Wir zeigen, daß der Kehrwert $\prod_{\nu=\nu_0(\alpha)}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{\nu}\right)^{-1}$ über alle Schranken wächst. Benutze: $\left(1-\frac{\alpha}{\nu}\right)^{-1} = 1+\frac{\alpha}{\nu}+\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^2+\cdots$, da $\left|\frac{\alpha}{\nu}\right| < 1$ für $\nu \geq \nu_0(\alpha)$. Es genügt zu zeigen

$$\prod_{\nu=\nu_0(\alpha)}^{n}\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right) \geq 1+\sum_{\nu=\nu_0(\alpha)}^{n}\left(\frac{\alpha}{\nu}\right) + \text{hoehere Produkte} \overset{\alpha>0}{\geq} 1+\alpha\cdot\sum_{\nu=\nu_0(\alpha)}^{n}\frac{1}{\nu} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

5.26 Eulersche Formel

$f:\ [0,n]\to\mathbb{R}$ sei $2N+1$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{n} f(\nu) &= \int_0^n f(t)dt + \frac{f(0)+f(n)}{2} + \sum_{m=1}^{N}\frac{B_{2m}(0)}{(2m)!}\left(f^{(2m-1)}(n)-f^{(2m-1)}(0)\right)\\ &\quad + \frac{1}{(2N-1)!}\int_0^n B_{2N+1}(<t>)f^{(2N+1)}(t)dt\end{aligned}$$

Zur Erinnerung: $t\in\mathbb{R}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $t=<t>+k$ mit $t\in[0,1)$, $k\in\mathbb{Z}$. Beachte: $<t>$ ist periodisch: $<t+1>=<t>$.

5.26.1 Bernoulli-Polynome

Rekursiv definiert durch $B_0(t)=1$ und

1. $B'_{n+1}(t) = (n+1)B_n(t)$ für $n\geq 0$
2. $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$ für $n \geq 1$

Beispiel:

- $B_1(t) = t-\frac{1}{2}$
- $B_2(t) = t^2-t+\frac{1}{6}$
- $B_3(t) = t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t$

5.26.2 Anwendung – Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$f(t) = t$, $N = 1 \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{n} \nu = \frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{2} + 0 = \frac{n(n+1)}{2}$

5.26.3 Anwendung – Stirlings Formel

Der Limes $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{(n+\frac{1}{2})}e^{-n}}$ existiert (und ist gleich $\sqrt{2\pi}$).

Beweis: $f(t) = \log(1+t)$, $f'(t) = \frac{1}{1+t}$, $f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$.

$$\begin{aligned}
\log n! &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \log(1+\nu) \\
&= \int_1^n \log t\, dt + \frac{1}{2}(\log 1 + \log n) + \frac{B_2(0)}{2!}\left(\frac{1}{1+(n-1)} - \frac{1}{1+0}\right) \\
&\quad + \frac{1}{3!}\int_0^n B_3(< t >)\frac{2}{(1+t)^3}dt \\
&= n\log(n) - n + \frac{1}{2}\log(n) + \text{Cauchyfolge}(n)
\end{aligned}$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{(n+\frac{1}{2})}e^{-n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lim_{n\to\infty}$ Cauchyfolge(n).
Cauchy-Argument: $\left|\int_{n_1}^{n_2} \frac{1}{3}B_3(< t >)\frac{2}{(1+t)^3}dt\right| < \varepsilon$, falls $n_1, n_2 \geq M(\varepsilon)$. Das Integral ist abschätzbar durch $\left|\int_{n_1}^{n_2} \text{const} \cdot \frac{2}{(1+t)^3}dt\right| = \text{const}_2 \cdot (1+t)^{-2}\Big|_{n_1}^{n_2} \to 0$

5.26.4 Anwendung – Keplersche Faßregel

Das Volumen eines Fasses mit den äußeren Radien r_1 und r_2 sowie dem mittleren Radius R und der Länge l ist näherungsweise

$$l \cdot \frac{\pi r_1^2 + 4\pi R^2 + \pi r_2^2}{6}$$

Allgemeiner hat man die Simpsonsche Formel: Gegeben sei eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $2n+1$ äquidistante Stützstellen a, $a+\Delta$, $a+2\Delta$, $\ldots$, b

$$\begin{aligned}
\int_a^b h(t)dt &= \frac{b-a}{6n}\left(h(a) + 4h(a+\Delta) + 2h(a+2\Delta) + 4h(a+3\Delta) + \cdots + 4h(b-\Delta) + h(b)\right) \\
&\quad + \text{Fehler vom Typ } \frac{(b-a)^5}{n^5} \cdot \text{const} \cdot \max_{\xi\in[a,b]} h^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

5.26.5 Anwendung – $\log 2$

$\log 2 = 0.6931471806\ldots$.

Die Simpsonsche Regel ergibt für $\int_1^2 \frac{dt}{t} = \log(t)\Big|_1^2 = \log 2$ mit

- 1+2 Stützstellen ($n = 1$): 0.6944...
- 1+4 Stützstellen ($n = 2$): 0.69325...
- 1+8 Stützstellen ($n = 4$): 0.693154...

mittels

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} \overset{n=1}{\approx} \frac{1}{6}\left(1 + 4\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\right) = 0.6944$$

Beweis der Eulerschen Formel:

1. Schritt: Es genügt, diese Formel für $n = 1$ zu beweisen!

$$(*): \quad \int_0^1 f(t)dt = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{\nu=1}^{N} \frac{B_{2\nu}(0)}{(2\nu)!} \cdot f^{(2\nu-1)}(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{(2N+1)!} \cdot \int_0^1 B_{2N+1}(t) f^{(2N+1)}(t)dt$$

Begründung: Die Eulersche Formel entsteht durch Addition der Formel $(*)$ angewandt auf die Funktion $f(t)$, $f(t+1)$, $\ldots$, $f(t+n-1)$.

Achtung: Man braucht einen Hilfssatz! Grund: $B_{2N+1}(<t>)$ ist keine stetige Funktion. Man braucht: $\int_0^n B_{2N+1}(<t>) f^{(2N+1)}(t)dt$ existiert und ist gleich $\sum_{\nu=0}^{n-1} \int_0^1 B_{2N+1}(t) f^{(2N+1)}(t+\nu)dt$.

Benutze den Hilfssatz (ohne Beweis): Ist $g(t)$ eine integrierbare Funktion auf $[a,b]$. Ändert man $g(t)$ an endlich vielen Stellen ab, bleibt die neue Funktion integrierbar und hat dasselbe Integral über $[a,b]$.

2. Schritt: Beweis von $(*)$: Vollständige Induktion nach N:

Induktionsanfang ($N = \frac{1}{2}$):

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 B_1(t) f'(t)dt$$

Begründung: $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 f(t)dt &= \frac{f(0)+f(1)}{2} - \left(\frac{B_2(t)}{2} f'(t)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{B_2(t)}{t} f'(t)dt \right) \\ &= \frac{f(0)+f(1)}{2} - \frac{B_2(0)}{2} f'(t)\Big|_0^1 + \underbrace{\frac{B_3(0)}{2\cdot 3} f''(t)\Big|_0^1}_{=0} - \int\limits_0^1 \frac{B_3(t)}{2\cdot 3} f'''(t)dt\end{aligned}$$

da: $B_2(1) = B_2(0)$, $B_3(1) = B_3(0) = 0$.

5.27 Bemerkung über Bernouillipolynome

Sei $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(n) \end{array}$. Dann ist $(\Delta f)(n) = f(n) - f(n-1)$ die Ableitung und $(\Sigma f)(n) = \sum_{\nu}^{n} f(\nu)$ eine Stammfunktion von f.

Beispiel: $f(t) = t^i$; $(\Delta f)(n) = (n+1)^i - n^i = n^i + in^{i-1} + \binom{i}{2} n^{i-2} + \cdots - n^i$ steht in Analogie zu der einfachen Formel $(t^i)' = i \cdot t^{i-1}$.

Beispiel: Was ist $(\Sigma f)(n)$ für $f(t) = t^i$.

$$(\Sigma f)(n) = 1 + 2^i + 3^i + \cdots + n^i = \frac{B_{i+1}(x)}{i+1}\Big|_0^n = \frac{B_{i+1}(n) - B_{i+1}(0)}{i+1}$$

6 Differentialgleichungen

1. Beispiel: Einfachster Fall: $f'(x) = g(x)$, g stetig.
Lösung: $f(x) = \int_a^x g(t)dt + C$.

2. Beispiel: $f'(x) = c \cdot f(x)$, $c \in \mathbb{R}$.
Lösung: $f(x) = C \cdot \exp(c \cdot x)$, $C \in \mathbb{R}$. Sind das alle Lösungen?

6.1 1. Trick

Setze $f(x) = g(x) \cdot \exp(c \cdot x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x) \cdot \exp(cx) + h(x) \cdot c \cdot \exp(cx) \\ &= \big(h'(x) + c \cdot h(x)\big) \cdot \exp(cx) \\ &= c \cdot f(x) = c \cdot h(x) \cdot \exp(cx) \\ &\Leftrightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = C \end{aligned}$$

6.2 Heuristischer Ansatz

Ist eine Differentialgleichung vom Typ $f'(x) = F(f(x), x)$ gegeben, kann man für gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}$ aus der Differentialgleichung alle Ableitungen $f^{(\nu)}(x_0)$ bestimmen. Ansatz $\tilde{f} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}$, falls diese Reihe in einer ε-Reihe um x_0 konvergiert. Die Funktion $\tilde{f}$ ist dann ein "Kandidat" für die Lösung der Differentialgleichung.

Beispiel: $f'(x) = c \cdot f(x)$; $f(x_0) = d$
$f'(x_0) = c \cdot f(x_0) = c \cdot d$; $f''(x_0) = c \cdot f'(x_0) = c^2 d, \ldots, f^{(\nu)}(x_0) = c^\nu d.$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c^\nu d}{\nu!}(x - x_0)^\nu = d \cdot \exp\big(c \cdot (x - x_0)\big) = \underbrace{d \cdot \exp(-cx_0)}_{\text{const}} \cdot \exp(cx)$$

6.3 Anfangswertproblem

Gibt es für eine gegebene Differentialgleichung $f' = F(f, x)$ und vorgegebenem Funktionswert $f(x_0)$ immer eine Lösung?
Die Beantwortung dieser Frage wird über die folgenden Abschnitter verteilt erfolgen.

3. Beispiel: $a_0 \neq 0$, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$. Suche alle Lösungen der Differentialgleichung $a_0 f''(x) + a_1 f'(x) + a_2 f(x) = 0$ (oder allgemein $= g(x)$ für gegebenes $g(x)$).

1. Beobachtung: Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung, dann auch $\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)$ für beliebige λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Grund: Die Differentialgleichung ist linear in f. Also ist der Lösungsraum ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $A : \ C^2\big([a,b], \mathbb{R}\big) \to C^2\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ $A = a_0 D^2 + a_1 D + a_0$, $D = \frac{d}{dx} = ()'$.

2. Beobachtung: Heuristischer Ansatz: Wähle $f(x_0) = c$, $f'(x_0) = d$ als beliebig gegebene Konstanten. Dann legt dies alle weiteren Ableitungen $f^{(\nu)}(x_0) = a_0^{-1} \cdot \big(-a_1 f^{(\nu-1)}(x_0) - a_2 f^{(\nu-2)}(x_0)\big)$. Dieser Ansatz ist auf Grund der komplitzierten Form der Ableitung nicht praktikabel.

3. Beobachtung: (wichtiger Trick aus der LA): Setze $f'(x) = g(x)$. Dann ist die Differenzialgleichung für f äquivalent zu:

$$\begin{array}{rcll} g'(x) & = & -a_0^{-1} a_1 g(x) & -a_0^{-1} a_2 f(x) \\ f'(X) & = & 1 g(x) & +0 f(x) \end{array}$$

Setze $H : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $H(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$. $H'(x) = A \cdot H(x)$. Die Differentialgleichung kann dann als

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.
Lösungskandidat:

$$H(x) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu x^\nu}{\nu!} \right) \begin{pmatrix} \text{const}_1 \\ \text{const}_2 \end{pmatrix} = \exp(A \cdot x)$$

in Analogie zu $f'(x) = a \cdot f(x)$; $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^\nu}{\nu!} x^\nu \cdot \text{const.}$

4. Beobachtung: (Lösungsansatz mit komplexen Zahlen) Wir erlauben komplexwertige Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$f(x) = u(x) + i \cdot v(x) = \big(u(x), v(x)\big)$$

Hierbei sind $u(x)$ und $v(x)$ reellwertige Funktionen von x.

Beispiel: $\exp(c \cdot x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c^\nu x^\nu}{\nu!}$; $c \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$.
Es gilt nachwievor die Funktionalgleichung: $\mathbb{C} \ni c = \xi + i\eta$; $\exp(cx) = \exp(\xi x + i\eta x) = \exp(\xi x) \cdot \exp(i\eta x)$.

Definition: Sinus, Cosinus

$$\exp(i \cdot x) \stackrel{\text{Def}}{=} \cos(x) + i \cdot \sin(x) \tag{24}$$

Damit gilt:

$$\exp(cx) = \underbrace{e^{\xi x} \cos(\eta x)}_{u(x)} + i \cdot \underbrace{e^{\xi x} \sin(\eta x)}_{v(x)}$$

Lösungsansatz: $f(x) = \exp(cx)$, $c \in \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) + i \cdot v'(x) \\ &= \big(e^{\xi x} \cdot \cos(\eta x)\big)' + i \cdot \big(e^{\xi x} \cdot \sin(\eta n)\big)' \\ &= \xi e^{\xi x} \cos(\eta x) - e^{\xi x} \eta \sin(\eta x) + i \cdot \xi e^{\xi x} \sin(\eta x) + i \cdot e^{\xi x} \eta \cos(\eta x) \\ &= (\xi + i\eta) \cdot f(x) = c \cdot f(x) \end{aligned}$$

Einsetzen von $f(x) = \exp(cx)$, $c \in \mathbb{C}$ in die Differentialgleichung gibt: $a_0 c^2 f(x) + a_1 c f(x) + a_2 f(x)$. Falls $c \in \mathbb{C}$ so gewählt wird, daß $a_0 c^2 + a_1 c + a_0 = 0$, dann ist $f(x) = \exp(cx)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Diese Gleichung hat zwei Lösungen c_1, c_2 (Achtung: der Fall $c_1 = c_2$ ist nicht ausgeschlossen). Dann sind $\exp(c_1 x)$ und $\exp(c_2 x)$ Lösungen der Differentialgleichung. Analog wie oben gilt dann: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}: \ \lambda \exp(c_1 x) + \mu \exp(c_2 x)$ ist Lösung.

5. Beobachtung: (Lösung des Anfangswertproblems im Komplexen) Zu gegebenen Anfangswerten

(i) $f(x_0) = \alpha \in \mathbb{C}$

(ii) $f'(x_0) = \beta \in \mathbb{C}$

gibt es immer eine Lösung der Differentialgleichung $a_0 f'' + a_1 f' + a_2 f = 0$.
Versuch: Wähle Parameter $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, so daß (i) und (ii) erfüllt werden.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)}' & \lambda \exp(c_1 x_0) + \mu \exp(c_2 x_0) = \alpha \\ \text{(ii)}' & \lambda c_1 \exp(c_1 x_0) + \mu c_2 \exp(c_2 x_0) = \beta \end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem für λ, μ ist lösbar, falls determinante $= (c_2 - c_1)\exp(c_1 x_0)\exp(c_2 x_0) \neq 0$. D.h. falls $c_1 \neq c_2$ ist das Anfangswertproblem immer lösbar! Was ist also im Fall $c_1 = c_2 = c \in \mathbb{C}$?
Ansatz: $f(x) = h(x) - \exp(cx)$ liefert $h''(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = \lambda + \mu x$. Als Lösung ergibt sich also $f(x) = \lambda \exp(cx) + \mu x \exp(cx)$.

Index

ε-δ-Kriterium, 31
Äquivalenzrelation, 6

Ableitung, 36
absolute Konvergenz, 13
Addition, 22
Anfangswertproblem, 55
angeordneter Körper, 7
Antisymmetrie, 6
Archimedischer Körper, 9
Archimedisches Axiom, 9
Assoziativgesetz, 5

Bernoulli-Polynome, 51
Bernoullische Ungleichung, 9
beschränkte Folge, 11
Betragsfunktion, 9
Binomialtheorem, 14

Cauchy-Kriterium, 12
Cauchyfaltung, 17
Cauchyfolge, 11
Cauchyfolge im metrischen Raum, 24
cauchyvollständiger Körper, 11
Cosinus, 56

de l'Hospital, 47
Dichtigkeitssatz, 9
Differentialgleichung, 54
Differenzierbarkeit, 36
Distanz, 10
Distributivgesetz, 5
Doppelreihensatz, 17
Dreiecksungleichung, 9

Eulersche Formel, 51
Exponentialreihe, 14

Fixpunktsatz, 25
Flächenadditionsformel, 35
Folge, 10
Folgenkompakter Raum, 34

geometrische Reihe, 13
Gleichmäßige Stetigkeit, 34
Grenzwert, 11

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 37, 48

Integral, 33
integrierbare Funktion, 33
inverses Element, 5

Körper, 5
Körper der reellen Zahlen, 12
Keplersche Faßregel, 52
kettenint, 49
Kettenregel, 44, 49
Kommutativgesetz, 5
komplexe Zahlen, 8
kontraktive Abbildung, 25
konvergente Folge, 11
Konvergenz im metrischen Raum, 24

Lagrange, 44
Leibniz'sches Konvergenz-Kriterium, 12
Lineare Approximation, 38

Majorantenkriterium, 13
Maximum, 21
Metrische Räume, 23
Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 39

neutrales Element, 5
Norm, 22
Nullfolge, 11

Ordnungsrelation, 6

Produktregel, 49

Quotienten-Kriterium, 19

Reflezitivität, 6
Reihe, 12

Relation, 6

Schwartz-Ungleichung, 22
Simpsonsche Formel, 52
Sinus, 56
Skalare Multiplikation, 22
Skalarprodukt, 22
Stetige Abbildungen, 27
Stirlings Formel, 52
Supremum, 21
symmetrische Relation, 6

Taylor, 44
transitive Relation, 6
Transitivität, 6, 7

Umordnungssatz, 16

Verdichtungstrick, 13
Verfeinerung, 32
vollständiger Körper, 11

Zangenlemma, 12
Zerlegung, 32